**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**Рубцовский индустриальный институт (филиал)
ФГБОУ ВПО «Алтайский государственный технический университет
им. И.И. Ползунова»**

И.И. Кулешова

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Часть I

Методическое пособие

для студентов заочной формы обучения направления «Экономика»

Рубцовск 2014

УДК 517.9

Кулешова И.И. Математический анализ. Часть I.: Методическое пособие для студентов заочной формы обучения направления «Экономика»/ Рубцовский индустриальный институт. – Рубцовск, 2014. -97 с.

Учебное пособие содержит теоретический материал по теории пределов, дифференциального исчисления функции одной и нескольких переменных с достаточным количеством примеров, помогающих самостоятельно изучить рассмотренные темы. Там, где это возможно, раскрывается экономический смысл математических понятий, приводятся простейшие приложения элементов математического анализа в экономике.

Рассмотрено и одобрено на заседании НМС Рубцовского индустриального института
Протокол № 4 от 28.05.14 г.

Рецензент: к.ф. – м.н. В.Г. Дудник

СОДЕРЖАНИЕ

1. ФУНКЦИИ. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. ПРЕДЕЛЫ

1.1. Последовательности

1.1.1. Числовые последовательности

Бесконечной числовой последовательностью называется числовая функция f, определенная на множестве всех натуральных чисел N. Значения такой функции обозначают a_n (или b_n, c_n, ...). Число n называют номером члена a_n. Последовательность обозначают

$$\{a_n\}, \text{ или } a_n,\ n\in N, \text{ или } a_1, a_2, ..., a_n \ ... \qquad (1.1)$$

Другими словами, если каждому натуральному числу n сопоставлено число a_n, то говорят, что задана последовательность $\{a_n\}$. Число a_1 называется первым членом последовательности, a_2 — вторым, ..., a_n — n-м (общим) членом последовательности. Напомним основные способы задания бесконечной последовательности.

Прямым способом задания последовательности является задание функции f, порождающей последовательность:

$$a_n = f(n),\ n\in N. \qquad (1.2)$$

Формула (1.2) позволяет вычислить общий член последовательности a_n через номер n, например:

$$a_n = 5^n,\ n\in N, \qquad (1.3)$$

$$a_n = \frac{1+(-1)^n}{2},\ n\in N. \qquad (1.4)$$

Поэтому формулу (1.2) называют формулой общего члена последовательности. По этой формуле можно вычислить любой член последовательности. Первые несколько членов последовательности часто выписывают в виде строки наряду с формулой общего члена для большей наглядности. Например, для последовательности (1.4) имеем:

$$a_1 = \frac{1+(-1)^1}{2} = \frac{1-1}{2} = 0,\ a_2 = \frac{1+(-1)^2}{2} = 1,\ a_3 = \frac{1+(-1)^3}{2} = 0$$

и т. д. Следовательно, данная последовательность имеет вид:

$$0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, ...$$

Условимся вместо слов «рассмотрим последовательность $\{a_n\}$, заданную формулой $a_n = f(n)$, $n\in N$» говорить короче: «рассмотрим последовательность $a_n=f(n)$, $n\in N$» или еще короче: «пусть $a_n = f(n)$».

Пример 1.1. Пусть $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n^3}$. Вычислить первые пять членов этой последовательности.

Вычисляем по формуле общего члена последовательности:

$$a_1 = \frac{(-1)^1}{1^3} = -1,\ a_2 = \frac{(-1)^2}{2^3} = \frac{1}{8},\ a_3 = \frac{(-1)^3}{3^3} = -\frac{1}{27}$$

и т. д. Эта последовательность имеет вид:

$$-1,\ \frac{1}{8},\ -\frac{1}{27},\ \frac{1}{64},\ -\frac{1}{125},\ \dots .$$

Последовательность, у которой все члены принимают равные между собой значения, называется постоянной последовательностью.

Другим распространенным способом задания последовательности является рекуррентный способ. Этот способ задания последовательности состоит в том, что указывается правило (обычно это формула), позволяющее вычислить общий член последовательности через предыдущие члены, а также задаются несколько начальных членов последовательности. Формула, позволяющая вычислить общий член последовательности через предыдущие члены, носит название рекуррентного соотношения. Примером рекуррентного соотношения может служить формула

$$a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}. \tag{1.5}$$

Отметим, что заданием рекуррентного соотношения последовательность полностью не определяется. Все дело в том, что первые члены последовательности нельзя вычислить по рекуррентному соотношению. Например, формула (1.5) не имеет смысла при $n = 1$ и $n = 2$, так как члены a_0 и a_{-1} с номерами 0 и —1 не существуют, поэтому значения a_1 и a_2 надо задавать дополнительно. Такие значения a_1 и a_2 для данной последовательности называются начальными. Далее, начиная с a_3, рекуррентное соотношение и начальные члены a_1 и a_2 позволят вычислить любой член рассматриваемой последовательности.

Пусть, например, $a_1 = 1$, $a_2 = 0$. Тогда

$$a_3 = 2a_2 - a_1 = -1,\ a_4 = 2a_3 - a_2 = -2,\ a_5 = 2a_4 - a_3 = -3$$

и т. д. Таким образом, заданная рекуррентным соотношением (1.5) и начальными членами $a_1 = 1$ и $a_2 = 0$ последовательность имеет вид:

1, 0, —1, —2, —3, —4, —5, ...

Иногда последовательность задают словесно, т. е. описанием ее членов.

1.1.2. Ограниченные и монотонные последовательности

Определение 1. Последовательность $\{a_n\}$ называется ограниченной, если существует такое положительное число M, что для любого $n \in N$ выполняется неравенство

$$|a_n| \le M.$$

В противном случае последовательность называется неограниченной. Например, последовательности $a_n = \frac{1}{n^4}$ и $a_n = (-1)^n$ ограниченные, так как $0 < \frac{1}{n^4} \le 1$, т. е. $\left|\frac{1}{n^4}\right| \le 1$, и $-1 \le (-1)^n \le 1$, т.е. $\left|(-1)^n\right| \le 1$.

Определение 2. Последовательность $\{a_n\}$ называется возрастающей (убывающей), если для любого *n* выполняется неравенство

$$a_{n+1} \ge a_n \ \left(a_{n+1} \le a_n\right).$$

Если же $a_{n+1} > a_n \ \left(a_{n+1} < a_n\right)$, то последовательность называется строго возрастающей (убывающей).

Все эти последовательности называются монотонными последовательностями. Например, последовательность $\left\{\frac{1}{n^3}\right\}$ строго убывающая, так как для любого *n* имеем $\frac{1}{(n+1)^3} < \frac{1}{n^3}$. Последовательность $a_n = \frac{n-1}{n}$, $n \in N$, строго возрастающая, так как

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n(n+1)} > 0,$$

и, следовательно, $a_{n+1} > a_n$ для любого *n.* Очевидно, что не всякая последовательность является монотонной. Например, последовательности 1, 2, $\frac{1}{3}$, 4, $\frac{1}{5}$, 6, $\frac{1}{7}$, … и 0, 1, 0, 1, 0, 1, …

не являются монотонными.

1.2. Предел последовательности

1.2.1. Предел числовой последовательности. Сходящиеся и расходящиеся числовые последовательности

Определение 1. Пусть задана числовая последовательность $\{a_n\}$. Число *a* называется пределом этой последовательности, если для каждого заданного числа ε>0 найдется такое натуральное число *N*, что для любого номера *n*>*N* выполняется неравенство

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

В этом случае пишут:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \text{ или } a_n \to a \text{ при } n \to \infty$$

и говорят: «Последовательность $\{a_n\}$ имеет предел, равный числу *a»* или «Последовательность $\{a_n\}$ сходится к числу *a»*.

Выбор натурального числа *N* зависит от заданного положительного числа е. Чтобы отметить эту зависимость, пишут: $N = N(\varepsilon)$ или $N = N_\varepsilon$.

Определение 2. Последовательность, имеющая предел, называется сходящейся, а не имеющая предела — расходящейся.

Рассмотрим пример на вычисление предела последовательности, используя определение предела.

Пример 1.2. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n+1}{3n-1}=\frac{4}{3}. \qquad (1.6)$$

По определению число $\frac{4}{3}$ будет пределом этой последовательности, если для каждого числа ε>0 найдется натуральное число $N=N(\varepsilon)$, такое, что для всех номеров $n>N$ выполняется неравенство

$$\left|\frac{4n+1}{3n-1}-\frac{4}{3}\right|=\frac{7}{3(3n-1)}<\varepsilon .$$

Оно справедливо для всех $n>\frac{7+3\varepsilon}{9\varepsilon}$, т. е. для всех $n>N(\varepsilon)$, где $N(\varepsilon)=\left[\frac{7+3\varepsilon}{9\varepsilon}\right]$. Это и доказывает равенство (1.8).

Теорема 1. *Если последовательность имеет предел, то она ограничена.*

Доказательство. Пусть последовательность $\{a_n\}$ имеет пределом число a. Докажем, что она ограничена. Возьмем некоторое число $\varepsilon>0$. Тогда найдется номер N, такой, что вне интервала $(a—\varepsilon;\ a+\varepsilon)$ могут оказаться лишь N первых членов последовательности: $a_1, a_2, ..., a_N$. Среди чисел $a_1, a_2, ..., a_N$, $a—\varepsilon$, $a+\varepsilon$ найдем наименьшее и наибольшее и обозначим их соответственно через m и M. Тогда $m\le a_n\le M$ для всех n, а это и означает, что последовательность $\{a_n\}$ ограничена.

Теорема 2. *Всякая сходящаяся последовательность имеет только один предел.*

Доказательство. Используем при доказательстве метод от противного. Предположим, что сходящаяся последовательность $\{a_n\}$ имеет два различных предела a и b. Пусть для определенности $a<b$. Положив $\varepsilon=\frac{b-a}{3}>0$, получим:

$$a+\varepsilon<b-\varepsilon . \qquad (1.7)$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, то согласно определению предела для выбранного $\varepsilon=\frac{b-a}{3}$ существует такой номер N_1, что для всех $n>N_1$ будет выполняться неравенство $|a_n-a|<\varepsilon$ и, в частности, $a_n<a+\varepsilon$. С другой стороны, так как $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=b$, то существует такой номер N_2, что для всех $n>N_2$ будет $|a_n-b|<\varepsilon$ и, в частности, $b-\varepsilon<a_n$. Положив $N=\max\{N_1, N_2\}$ (т. е. выбрав максимальное из двух чисел N_1 и N_2), получим, что $b-\varepsilon<a_n<a+\varepsilon$ для $n>N$, но это противоречит неравенству (1.7). Следовательно, последовательность не может иметь двух различных пределов.

1.2.2. Бесконечно малые последовательности

Вычисление пределов и доказательства теорем о пределах упрощаются, если использовать понятие бесконечно малой последовательности.

Определение. Последовательность называется бесконечно малой, если ее предел равен нулю.

Например, последовательность $a_n = \dfrac{1}{n}$ является бесконечно малой, так как ее предел равен нулю. Последовательность $a_n = \dfrac{1}{10^n}$ также бесконечно малая, так как $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{10^n} = 0$.

Теорема 3. Для того чтобы *a* было пределом последовательности $\{a_n\}$, необходимо и достаточно, чтобы a_n могло быть предоставлено в виде $a_n = a + \alpha_n$, где $\{\alpha_n\}$ - бесконечно малая последовательность, т.е. $\alpha_n \to 0$ при $n \to \infty$.

По условию теоремы $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N = N(\varepsilon)$, такой, что

$$|a_n - a| < \varepsilon \tag{1.8}$$

для всех *n*>*N*. Пусть $\alpha_n = a_n - a$, тогда

$$|\alpha_n| < \varepsilon \tag{1.9}$$

для всех *n*>*N*, откуда следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$. Итак, если число *a* – предел последовательности $\{a_n\}$, то $a_n = a + \alpha_n$, где $\{a_n\}$ - бесконечно малая последовательность. Аналогично доказывается и обратное утверждение, так как из (1.8) следует (1.9).

1.2.3. Теоремы о пределах последовательностей, связанные с арифметическими действиями

При вычислении пределов часто приходится использовать теоремы о пределе суммы, разности, произведения и частного. Рассмотрим их без доказательства.

Теорема 1 (о пределе суммы). *Если последовательности* $\{a_n\}$ *и* $\{b_n\}$ *сходятся, то их сумма* $\{a_n + b_n\}$ *также сходится и предел суммы равен сумме пределов:*

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Теорема 2 (о пределе произведения). *Если последовательности* $\{a_n\}$ *и* $\{b_n\}$ *сходятся, то их произведение* $\{a_n b_n\}$ *сходится и предел произведения равен произведению пределов:*

$$\lim_{n\to\infty}(a_nb_n)=\left(\lim_{n\to\infty}a_n\right)\left(\lim_{n\to\infty}b_n\right).$$

С л е д с т в и е 1. Постоянный множитель можно выносить за знак предела:

$$\lim_{n\to\infty}(ca_n)=c\lim_{n\to\infty}a_n.$$

По теореме 2 имеем $\lim\limits_{n\to\infty}(ca_n)=\left(\lim\limits_{n\to\infty}c\right)\left(\lim\limits_{n\to\infty}a_n\right)=c\lim\limits_{n\to\infty}a_n$, так как $\lim\limits_{n\to\infty}c=c$.

С л е д с т в и е 2. Если последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ сходятся, то их разности $\{a_n-b_n\}$ сходятся и предел разности равен разности пределов:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n-\lim_{n\to\infty}b_n.$$

По теореме 1 и следствию 1 имеем $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+(-1)b_n)=$
$=\lim\limits_{n\to\infty}a_n+\lim\limits_{n\to\infty}((-1)b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n-\lim\limits_{n\to\infty}b_n$.

Теорема 3 (о пределе частного). *Если последовательности* $\{a_n\}$ *и* $\{b_n\}$ *сходятся, причем* $b_n\neq 0$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty}b_n\neq 0$, *то их частное* $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$ *сходится и предел частного равен частному пределов:*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right)=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}.$$

Рассмотрим примеры вычисления пределов с помощью доказанных теорем.

Пример 1.3. Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7-5n}{3-4n}$.

Числитель и знаменатель представляют собой расходящиеся последовательности (так как они не ограничены), поэтому нельзя непосредственно применить теорему о пределе частного. Однако можно сначала поделить и числитель, и знаменатель на n (от этого дробь не изменится), а потом уже применить теоремы о пределе частного и разности:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{7-5n}{3-4n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{7}{n}-5}{\frac{3}{n}-4}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{7}{n}-5\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n}-4\right)}=\frac{5}{4}.$$

Пример 1.4. Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5(n^2+2n+1)}{1-n-n^2}$.

Имеем: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5(n^2+2n+1)}{1-n-n^2}=5\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+2n+1}{1-n-n^2}=5\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n}-1}=5\cdot\dfrac{1}{(-1)}=-5$.

1.3. Предел функции

1.3.1. Предел функции при $x \to +\infty$

Дадим определение предела функции $y = f\left(x\right)$ при $x \to +\infty$, предполагая при этом, что функция $y = f\left(x\right)$ определена или на всей числовой оси, или для всех *x*, больших некоторого числа.

Число b *называется пределом функции* $y = f\left(x\right)$ при $x \to +\infty$, если каково бы ни было положительное число ε, можно найти такое число *N*, что для всех *x*, больших *N*, выполняется неравенство

$$\left|f\left(x\right)-b\right| < \varepsilon. \qquad (1.10)$$

Символическая запись определения предела функции $f\left(x\right)$ при $x \to +\infty$ имеет следующий вид:

$$\underset{\varepsilon}{\forall}\left(\varepsilon > 0\right)\exists\, N\ \underset{x}{\forall}\left(x > N\right) \Rightarrow \left|f\left(x\right)-b\right| < \varepsilon.$$

Иными словами, если функция имеет число *b* своим пределом (при $x \to +\infty$), то при неограниченном возрастании аргумента *x* значения этой функции сколь угодно мало отличаются от числа *b*, т.е. разность между значением функции и числом *b* становится сколь угодно близкой к нулю.

То, что функция имеет число *b* своим пределом при $x \to +\infty$, записывается следующим образом*: $\lim\limits_{x \to +\infty} f\left(x\right) = b$. Это читается так: «предел эф от *x* при *x*, стремящемся к плюс бесконечности, равен *b*». Возвращаясь к нашему примеру, имеем: $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(2 - \dfrac{1}{x}\right) = 2$.

Пример 1.5. Доказать, что $\lim\limits_{x \to +\infty}\dfrac{5x+3}{x} = 5$.

Решение. В данном случае $f\left(x\right) = \dfrac{5x+3}{x}$, а *b*=5. Зададим произвольное положительное число ε и рассмотрим абсолютную величину разности $f\left(x\right) - b$:

$$\left|f\left(x\right)-b\right| = \left|\frac{5x+3}{x} - 5\right| = \left|\frac{3}{x}\right| = \frac{3}{\left|x\right|}.$$

Для того, чтобы разность была меньше ε, т.е. чтобы выполнялось неравенство

$$\left|\frac{5x+3}{x} - 5\right| = \frac{3}{\left|x\right|} < \varepsilon, \qquad (*)$$

достаточно, чтобы $\left|x\right| > 3/\varepsilon$. Так как мы рассматриваем предел функции при $x \to +\infty$, то *x* можно считать положительным. Поэтому неравенство (*)

* lim – первые три буквы латинского слова limes, которое в переводе на русский язык означает предел.

выполняется для всех $|x|>3/\varepsilon$. В данном случае указанное в определении предела число *N* равно $3/\varepsilon$. Итак,

$$\underset{\varepsilon}{\forall}(\varepsilon>0)\ \underset{\mathrm{N}}{\exists}(N=3/\varepsilon)\Rightarrow\left|\frac{5x+3}{x}-5\right|<\varepsilon.$$

Это и означает, что $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5x+3}{x}=5$.

Установим г е о м е т р и ч е с к и й с м ы с л предела функции при $x\to+\infty$. Как мы знаем, если функция $y=f(x)$ имеет пределом число *b*, то это значит, что для любого $\varepsilon>0$ найдется такое число *N*, что для всех $x>N$ выполняется неравенство $|f(x)-b|<\varepsilon$. На основании свойств абсолютных величин это неравенство равносильно следующим неравенствам:

$$-\varepsilon<f(x)-b<\varepsilon, \tag{1.11}$$

или *

$$b-\varepsilon<f(x)<b+\varepsilon. \tag{1.11'}$$

Неравенства (1.11') показывают, что ординаты всех точек графика функции $y=f(x)$, абсциссы которых превосходят число *N*, заключены между числами $b-\varepsilon$ и $b+\varepsilon$. Это значит, что график функции $y=f(x)$ для всех *x*, превосходящих число *N*, содержится в полосе, ограниченной прямыми $y=b-\varepsilon$ и $y=b+\varepsilon$ (рис. 1.1,а). Число *N*, фигурирующее в определении предела, вообще говоря, зависит от ε. Чем меньше ε, т.е. чем у́же полоса между прямыми $y=b-\varepsilon$ и $y=b+\varepsilon$, тем бо́льшим будет *N*.

1.3.2. Предел функции при $x\to-\infty$

Теперь рассмотрим определение предела функции при *x*, стремящемся к минус бесконечности ($x\to-\infty$).

Число b *называется пределом функции* $y=f(x)$ *при* $x\to-\infty$, *если каково бы ни было положительное число* ε, *можно найти такое число M, что для всех x, меньших M, выполняется неравенство* $|f(x)-b|<\varepsilon$.

Символическая запись определения предела функции $f(x)$ при $x\to-\infty$:

$$\underset{\varepsilon}{\forall}(\varepsilon>0)\ \exists M\ \underset{x}{\forall}(x<M)\Rightarrow|f(x)-b|<\varepsilon.$$

Если функция $f(x)$ имеет пределом число *b* при $x\to-\infty$, то это записывают так: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=b$.

---

* Так как неравенство $|z|<\varepsilon$ равносильно неравенствам $-\varepsilon<z<\varepsilon$, то, полагая $z=f(x)-b$, придем к неравенствам

Г е о м е т р и ч е с к и й   с м ы с л предела функции при $x \to -\infty$ аналогичен геометрическому смыслу предела при $x \to +\infty$. Если $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$, то каково бы ни было положительное число $\varepsilon > 0$, найдется такое число *M*, что при всех $x < M$ график функции $y = f(x)$ находится в полосе, ограниченной прямыми $y = b - \varepsilon$ и $y = b + \varepsilon$ (рис. 1.1,б).

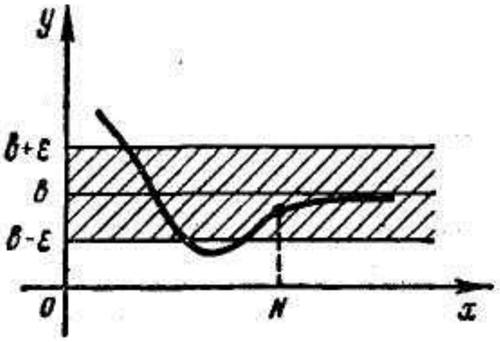


Рис. 1.1, а

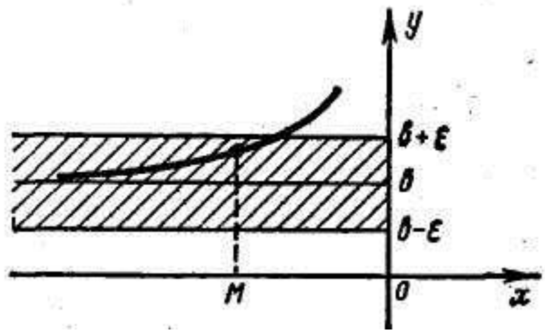


Рис. 1.1, б

1.3.3. Предел функции при $x \to x_0$

Мы ввели понятия предела функции при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$. Введем теперь понятие предела при $x \to x_0$. Рассмотрим сперва случай, когда независимая переменная *x* приближается к x_0 слева.

Число b называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \to x_0$ слева, если каково бы ни было положительное число ε, найдется такое число N (меньшее x_0), что для всех x, лежащих между N и x_0 $(N < x < x_0)$, выполняется неравенство $\left| f(x) - b \right| < \varepsilon$.

Символическая запись определения предела функции $f(x)$ при $x \to x_0$ слева:

$$\underset{\varepsilon}{\forall}(\varepsilon > 0)\ \underset{N}{\exists}(N < x_0)\underset{x}{\forall}(N < x < x_0) \Rightarrow \left| f(x) - b \right| < \varepsilon .$$

Понятие предела функции при $x \to x_0$ слева сходно с понятием предела функции при $x \to +\infty$ и отличается от него лишь тем, что в случае предела функции при $x \to +\infty$ неравенство (1.12) выполняется для всех *x*, превосходящих *N*, а в случае предела функции при $x \to x_0$ слева – для всех *x*, превосходящих *N*, но меньших, чем x_0. Предел функции при $x \to x_0$ слева обозначают так: $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = b$. Символ $x \to x_0 - 0$ означает, что *x* стремится к x_0 слева.

Г е о м е т р и ч е с к и й   с м ы с л предела функции при $x \to x_0 - 0$ заключается в следующем: каково бы ни было $\varepsilon > 0$, найдется такое число

$N\left(N < x_0\right)$, что для всех *x*, заключенных между *N* и x_0, график функции лежит в полосе, ограниченной прямыми $y = b - \varepsilon$ и $y = b + \varepsilon$ (рис. 1.2, а).

Аналогично предел функции при $x \to x_0$ слева вводится понятие предела при $x \to x_0$ справа.

Число b *называется пределом функции* $f\left(x\right)$ при $x \to x_0$ *справа, если каково бы ни было положительное число* ε*, найдется такое число* M *(большее* x_0*), что для всех* x*, лежащих между* x_0 *и* M $\left(x_0 < x < M\right)$*, выполняется неравенство* $\left|f\left(x\right) - b\right| < \varepsilon$.

Символическая запись определения предела функции $f\left(x\right)$ при $x \to x_0$ справа:

$$\underset{\varepsilon}{\forall}\left(\varepsilon > 0\right)\ \underset{N}{\exists}\left(M > x_0\right)\underset{x}{\forall}\left(x_0 < x < M\right) \Rightarrow \left|f\left(x\right) - b\right| < \varepsilon.$$

Предел функции при $x \to x_0$ справа обозначают так: $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f\left(x\right) = b$. Если функция $y = f\left(x\right)$ при $x \to x_0$ справа имеет пределом число *b*, то геометрически это означает, что график функции лежит в полосе, ограниченной прямыми $y = b - \varepsilon$ и $y = b + \varepsilon$ для всех *x*, заключенных между x_0 и *M* (рис. 1.2, б).

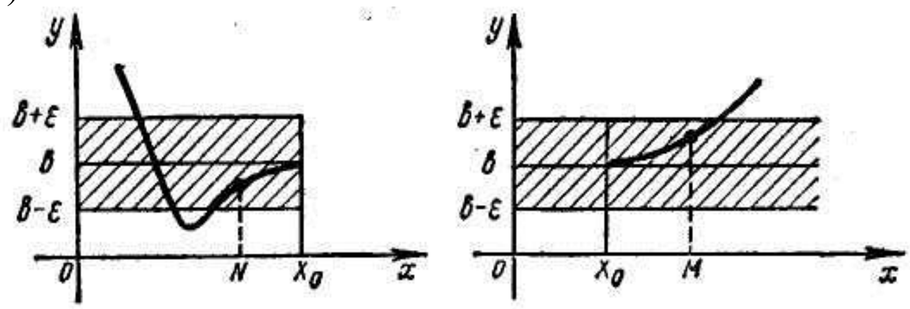


Рис. 1.2, а Рис. 1.2, б

Пределы функции при $x \to x_0$ слева $\left(x \to x_0 - 0\right)$ и при $x \to x_0$ справа называются *односторонними* пределами.

Если оба односторонних предела существуют и равны между собой, то говорят, что функция $f\left(x\right)$ имеет *двусторонний предел* при $x \to x_0$, или просто предел при $x \to x_0$.

Таким образом, *число* b *является пределом функции* $y = f\left(x\right)$ *при* $x \to x_0$, *если каково бы ни было* $\varepsilon > 0$*, можно найти такие числа M и* $N\left(N < x_0 < M\right)$*, что для всех x, лежащих в интервале* $\left(N,\ M\right)$ *(за исключением, быть может, точки* x_0*), выполняется неравенство* $\left|f\left(x\right) - b\right| < \varepsilon$.

Символическая запись определения предела функции $f(x)$ при $x \to x_0$: $\underset{\varepsilon}{\forall}(\varepsilon > 0) \underset{M,N}{\exists}(N < x_0 < M) \underset{x}{\forall}(x \in (N, M))$ (за исключением, быть может, точки x_0) $\Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$.

Назовем *окрестностью* точки x_0 любой интервал, содержащий эту точку. Легко видеть, что если b есть предел функции $y = f(x)$ при $x \to x_0$, то неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$ выполняется для всех точек некоторой окрестности точки x_0 (за исключением, быть может, точки x_0).

Если при $x \to x_0$ функция $f(x)$ имеет предел, равный b, то это записывают так: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = b$. Геометрический смысл предела при $x \to x_0$ ясен из рисунка 1.3.

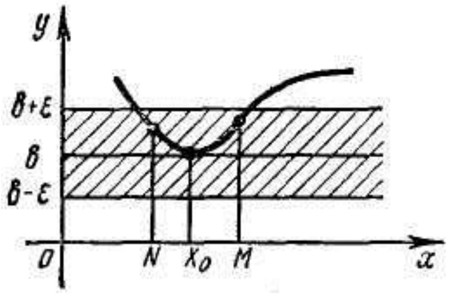


Рис. 1.3

З а м е ч а н и е 1. В определении предела при $x \to x_0$ (или $x \to x_0 + 0$, или $x \to x_0 - 0$) рассматривались значения $x \neq x_0$. В самой точке x_0 функция может быть и не определена. В дальнейшем это замечание будет неоднократно использовано.

З а м е ч а н и е 2. Числа M и N, фигурирующие в определениях предела при $x \to x_0$ (или $x \to x_0 - 0$, или $x \to x_0 + 0$), зависят от ε и x_0.

Пример 1.6. Рассмотрим функцию $y = 2x + 1$. Ее значение при $x = 4$ равно 9. Покажем, что при приближении независимой переменной x слева и справа к числу 4 значения функции неограниченно приближаются к числу 9, т.е. что $\lim\limits_{x \to 4}(2x + 1) = 9$.

Для этого возьмем произвольное положительной число ε и убедимся в том, что для значений x, близких к $x_0 = 4$, разность между функцией и числом 9 по абсолютной величине может быть сделана меньше ε, т.е. что $|(2x + 1) - 9| < \varepsilon$. Очевидно,

$$\{|2x + 1| - 9 < \varepsilon\} \Leftrightarrow \{-\varepsilon < (2x + 1) - 9 < \varepsilon\} \Leftrightarrow \left\{4 - \frac{\varepsilon}{2} < x < 4 + \frac{\varepsilon}{2}\right\}.$$

Итак, разность между функцией и числом 9 становится (по абсолютной величине) меньше ε для всех x, лежащих между числами $N = 4 - \frac{\varepsilon}{2}$ и $M = 4 + \frac{\varepsilon}{2}$. Поэтому функция $y = 2x + 1$ имеет предел $\lim\limits_{x \to 4}(2x+1) = 9$.

Пример 1.7. Рассмотрим функцию $y = f(x)$, определенную на сегменте $[0,\ 4]$ следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, \text{ если } 0 \le x < 3, \\ 3 - x, \text{ если } 3 \le x \le 4. \end{cases}$$

График этой функции приведен на рисунке 1.4. Очевидно, $\lim\limits_{x \to 3-0} f(x) = \lim\limits_{x \to 3-0}(x-1) = 2$, $\lim\limits_{x \to 3+0} f(x) = \lim\limits_{x \to 3+0}(3-x) = 0$, что наглядно видно из графика. Здесь предел справа и предел слева не равны друг другу. Поэтому функция $y = f(x)$ не имеет предела (двустороннего) при $x \to 3$.

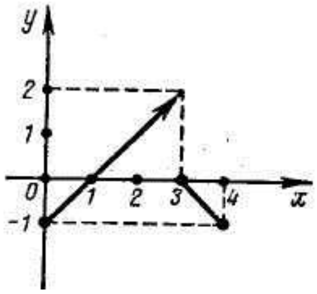


Рис. 1.4

Покажем теперь, что если функция имеет предел, то он единственный. Это легко установить геометрически. В самом деле, допустим противное, т.е. что функция $y = f(x)$, например, при $x \to +\infty$, имеет два предела b_1 и b_2. Рассмотрим две полосы, одна из которых ограничена прямыми $y = b_1 - \varepsilon$, $y = b_1 + \varepsilon$, а другая – прямыми $y = b_2 - \varepsilon$, $y = b_2 + \varepsilon$. При этом ε возьмем столь малым, чтобы обе полосы не имели общих точек. Тогда при достаточно больших x график функции не может находиться одновременно в каждой из этих полос. Таким образом, всякая функция либо совсем не имеет предела, либо имеет только один предел.

1.3.4. Бесконечно малые функции. Ограниченные функции

Функция $y = f(x)$ называется *бесконечно малой* при $x \to +\infty$, если ее предел при $x \to +\infty$ равен нулю. Аналогично определяются бесконечно малые функции при $x \to -\infty$, $x \to x_0 - 0$, $x \to x_0 + 0$, $x \to x_0$. Так как для бесконечно малой функции предел $b = 0$, а $|f(x) - b| = |f(x) - 0| = |f(x)|$, то на основании понятия предела, например при $x \to +\infty$, можно дать следующее определение бесконечно малой функции, равносильное только данному.

Функция $y = f(x)$ называется *бесконечно малой* (при $x \to +\infty$), если каково бы ни было $\varepsilon > 0$, можно найти такое число N, что при всех $x > N$ выполняется неравенство*

$$\left| f(x) \right| < \varepsilon . \qquad (1.12)$$

Символическая запись определения бесконечно малой при $x \to +\infty$:

$$\underset{\varepsilon}{\forall}(\varepsilon > 0) \exists N \underset{x}{\forall}(x > N) \Rightarrow \left| f(x) \right| < \varepsilon .$$

Пример 1.8. Покажем, что функция $y = 1/x^2$ является бесконечно малой при $x \to +\infty$. Для этого надо показать, что при $x \to +\infty$ ее предел $b = 0$, т.е. что для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое N, что для $x > N$ выполняется неравенство (1.12):

$$\left| f(x) \right| = \left| \frac{1}{x^2} \right| = \frac{1}{x^2} < \varepsilon .$$

Но это неравенство осуществляется при $x > 1/\sqrt{\varepsilon} = N$.

Вообще, можно показать, что функция $y = 1/x^\alpha$ (где α - любое положительное число) есть бесконечно малая при $x \to +\infty$.

Пример 1.9. Покажем, что функция $y = x^3$ является бесконечно малой при $x \to 0$. Зададим $\varepsilon > 0$. Неравенство $\left| f(x) \right| = \left| x^3 \right| < \varepsilon$, очевидно, выполняется для всех тех значений аргумента x, для которых $|x| < \sqrt[3]{\varepsilon}$, $-\sqrt[3]{\varepsilon} < x < \sqrt[3]{\varepsilon}$. Таким образом, неравенство $\left| x^3 \right| < \varepsilon$ выполняется для всех x, лежащих между $N = -\sqrt[3]{\varepsilon}$ и $M = \sqrt[3]{\varepsilon}$. Это значит, что $\lim\limits_{x \to 0} x^3 = 0$, т.е. функция $y = x^3$ бесконечно малая при $x \to 0$.

Вообще, можно показать, что функция $y = x^m$ (где $m > 0$) бесконечно малая при $x \to 0$.

Докажем теперь несколько теорем о бесконечно малых функциях. Для определенности все формулировки и доказательства теорем будем проводить для случая бесконечно малых функций при $x \to +\infty$, так как для всех остальных случаев формулировки и доказательства аналогичны. Рекомендуем самостоятельно сформулировать и доказать эти теоремы для $x \to -\infty$, $x \to x_0 - 0$, $x \to x_0$ и $x \to x_0 + 0$.

Теорема 1. *Если функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ являются бесконечно малыми функциями (при $x \to +\infty$)*, то и их сумма $\varphi(x)$ + $\psi(x)$ *также является бесконечно малой функцией (при $x \to +\infty$).*

Доказательство. Пусть $f(x)$ = $\varphi(x)$ + $\psi(x)$. Требуется доказать, что $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, т.е. установить, что

---

* Рекомендуем сформулировать второе определение бесконечно малой функции для случаев $x \to -\infty$, $x \to x_0$, $x \to x_0 - 0$ и $x \to x_0 + 0$.

$$\underset{\varepsilon}{\forall}(\varepsilon > 0)\exists N \underset{x}{\forall}(x > N) \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon.$$

Итак, пусть ε - любое положительное число. Так как $\varphi(x)$ по условию является бесконечно малой функцией, то для положительного числа $\varepsilon/2$

$$\exists N_1 \underset{x}{\forall}(x > N_1) \Rightarrow |\varphi(x)| < \varepsilon/2. \qquad (1.13)$$

Аналогично, для того же числа $\varepsilon/2$

$$\exists N_2 \underset{x}{\forall}(x > N_2) \Rightarrow |\psi(x)| < \varepsilon/2. \qquad (1.14)$$

Пусть N – наибольшее из чисел N_1 и N_2. Тогда для $x > N$ выполняются одновременной оба неравенства (1.13) и (1.14). Но в таком случае*

$$\underset{\varepsilon}{\forall}(x > N) \Rightarrow \left\{ |f(x)| = |\varphi(x) + \psi(x)| \le |\varphi(x)| + |\psi(x)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \right\}.$$

Следовательно, $\underset{x}{\forall}(x > N) \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$, а это значит, что функция $f(x) = \varphi(x) + \psi(x)$ является бесконечно малой функцией при $x \to +\infty$.

Эта теорема может быть легко обобщена на любое конечное число бесконечно малых функций. Кратко ее читают так: *сумма нескольких бесконечно малых функций есть функция бесконечно малая.*

Пример 1.10. Функция $y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{x^2}$ является бесконечно малой функцией при $x \to +\infty$, так как каждое слагаемое $1/\sqrt{x}$, $1/x$ и $1/x^2$ есть бесконечно малая функция при $x \to +\infty$.

Прежде чем переходить к дальнейшим теоремам о бесконечно малых функциях, введем понятие ограниченной функции.

Функция $y = f(x)$ называется *ограниченной* на некотором множестве М значений аргумента *x*, если существует такое положительное число *C*, что для всех $x \in M$ выполняется неравенство $|f(x)| \le C$. Таким множеством может быть, например, интервал, сегмент или даже вся числовая прямая.

Пример 1.11. Функция $y = \sin x$ и $y = \cos x$ ограничены на всей числовой прямой, так как для любого значения *x* имеем $|\sin x| \le 1$, $|\cos x| \le 1$.

Пример 1.12. Функция $y = 1/x$ не является ограниченной на интервале $(0,\ 1)$, так как нельзя указать такое число *C*, чтобы для всех $x \in (0,\ 1)$ выполнялось неравенство $|1/x| \le C$.

Следующие две теоремы устанавливают связь между понятиями ограниченной функции и функции, имеющей предел. Для определенности рассмотрим случай предела функции при $x \to +\infty$ и приведем их без доказательств.

Теорема 2. *Если функция* $y = f(x)$ *имеет предел при* $x \to +\infty$*, то она ограничена на некотором бесконечном интервале* $(N,\ +\infty)$.

---

* Здесь мы используем следующее свойство абсолютных величин: $|a + b| \le |a| + |b|$.

Замечание. Функцию, ограниченную на бесконечном интервале $]N,\ +\infty[$, будем называть ограниченной при $x \to +\infty$.

Следствие. *Бесконечно малая функция (при $x \to +\infty$) ограничена (при $x \to +\infty$).*

Теорема 3. *Если функция $y = f(x)$ имеет предел, отличный от нуля (при $x \to +\infty$), то функция $y = 1/f(x)$ ограничена (на некотором бесконечном интервале).*

Теорема 4. *Произведение бесконечно малой функции (при $x \to +\infty$) на функцию ограниченную (при $x \to +\infty$) является функцией бесконечно малой.*

Пример 1.13. Функция $y = \dfrac{\sin x}{x^2}$ является бесконечно малой при $x \to +\infty$, так как она является произведением ограниченной функции $\sin x$ на бесконечно малую (при $x \to +\infty$) функцию $y = 1/x^2$.

Пример 1.14. Функция $y = x^2(1+\sin x)$ является бесконечно малой при $x \to 0$, так как она является произведением ограниченной функции $(1+\sin x)$ на функцию x^2, бесконечно малую при $x \to 0$.

Следствие 1. Так как всякая бесконечно малая функция ограничена, то из только что доказанной теоремы вытекает, что *произведение двух бесконечно малых функций есть функция бесконечно малая.*

Следствие 2. *Произведение бесконечно малой функции на число есть функция бесконечно малая.*

Теорема 5. *Частное от деления функции $f(x)$, бесконечно малой при $x \to +\infty$, на функцию $\varphi(x)$, предел которой (при $x \to +\infty$) отличен от нуля, является функцией бесконечно малой.*

1.3.5. Основные теоремы о пределах

В этом пункте мы приведем некоторые теоремы о правилах предельного перехода, которые, как мы видим в дальнейшем, облегчает нахождение пределов. При этом заметим, что как формулировки, так и доказательства этих теорем для случаев $x \to +\infty$, $x \to -\infty$, $x \to x_0 - 0$, $x \to x_0$, $x \to x_0 + 0$ совершенно аналогичны. Поэтому, для определенности, мы приведем их только для случая $x \to +\infty$.

Прежде всего, установим связь между функцией, имеющей предел, и бесконечно малой функцией. Эта связь отражена в содержании следующих двух теорем.

Теорема 1. *Если функция $f(x)$ имеет предел (при $x \to +\infty$), равный b, то ее можно представить как сумму числа b и бесконечно малой функции (при $x \to +\infty$).*

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$. Рассмотрим разность

$$f(x) - b = \alpha(x) \tag{1.15}$$

и покажем, что $\alpha(x)$ - бесконечно малая функция (при $x \to +\infty$). Так как $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$, то $\underset{\varepsilon}{\forall}(\varepsilon > 0)\exists N \underset{x}{\forall}(x > N) \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$. Но тогда и $|\alpha(x)| < \varepsilon$ для $x > N$. Это значит, что $\alpha(x)$ бесконечно малая функция. Из равенства (1.15) находим $f(x) = b + \alpha(x)$. Таки образом, теорема доказана.

Теорема 2 (обратная)**.** *Если функцию* $f(x)$ *можно представить как сумму числа* b *и некоторой бесконечно малой функции (при* $x \to +\infty$*), то число* b *является пределом функции* $f(x)$ *(при* $x \to +\infty$*).*

Доказательство. По условию $f(x) = b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ - бесконечно малая функция (при $x \to +\infty$). Покажем, что $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$. Действительно, $f(x) - b = \alpha(x)$. Так как $\alpha(x)$ бесконечно малая функция, то $\underset{\varepsilon}{\forall}(\varepsilon > 0)\exists N \underset{x}{\forall}(x > N) \Rightarrow \{\alpha(x) < \varepsilon\}$. Но так как $|f(x) - b| = |\alpha(x)|$, то при $x > N$ имеем $|f(x) - b| < \varepsilon$. Это и означает, на основании определения предела, что $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$.

Пример 1.15. Доказать, что $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(5 + \frac{6}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = 5$.

Решение. Так как функции $6/x$ и $1/x^2$ бесконечно малые при $x \to +\infty$, $\frac{6}{x} + \frac{1}{x^2}$, как сумма бесконечно малых функций, есть функция бесконечно малая. Функция $5 + \frac{6}{x} + \frac{1}{x^2}$ есть сумма числа 5 и бесконечно малой функции. Следовательно, по теореме 2

$$\lim_{x\to+\infty}\left(5 + \frac{6}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = 5.$$

Перейдем теперь к выводу правил предельного перехода.

Теорема 3. *Если* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = c$*, то функции* $f(x) + \varphi(x)$ *и* $f(x) - \varphi(x)$ *тоже имеют пределы при* $x \to +\infty$*, причем*

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x) \pm \varphi(x)\right] = \lim_{x\to+\infty} f(x) \pm \lim_{x\to+\infty} \varphi(x),$$

т.е. предел суммы (разности) двух функций равен сумме (разности) их пределов.

Доказательство. На основании теоремы 1 функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ можно представить в виде $f(x) = b + \alpha(x)$ и $\varphi(x) = c + \beta(x)$, где $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ - функции бесконечно малые при $x \to +\infty$. Но тогда

$$f(x) + \varphi(x) = \left[b + \alpha(x)\right] + \left[c + \beta(x)\right] = (b + c) + \left[\alpha(x) + \beta(x)\right]. \qquad (1.16)$$

На основании теоремы 1, п. 1.3.5, сумма $\alpha(x) + \beta(x)$ является бесконечно малой функцией. Равенство (1.16) показывает, что функция

$f(x)+\varphi(x)$ представлена как сумма числа $b+c$ и бесконечно малой функции $\alpha(x)+\beta(x)$. Следовательно, на основании теоремы 2 число $b+c$ является пределом функции $f(x)+\varphi(x)$. Итак,

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)+\varphi(x)\right]=b+c=\lim_{x\to+\infty}f(x)+\lim_{x\to+\infty}\varphi(x).$$

В случае разности функций доказательство аналогично.

З а м е ч а н и е. Теорема 3 справедлива для алгебраической суммы любого конечного числа функций.

Теорема 4. *Если* $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=b$ и $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=c$, *то функция* $f(x)\varphi(x)$ *имеет предел при* $x\to+\infty$, *причем*

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)\varphi(x)\right]=\lim_{x\to+\infty}f(x)\cdot\lim_{x\to+\infty}\varphi(x),$$

т.е. предел произведения двух функций равен произведению их пределов.

Доказательство. На основании теоремы 1 имеем

$$f(x)=b+\alpha(x),\ \varphi(x)=c+\beta(x),$$

где $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ - функции, бесконечно малые при $x\to+\infty$. Следовательно,

$$f(x)\varphi(x)=\left[b+\alpha(x)\right]\left[c+\beta(x)\right]=bc+\left[c\alpha(x)+b\beta(x)+\alpha(x)\beta(x)\right]. \qquad (1.17)$$

Функция $c\alpha(x)+b\beta(x)+\alpha(x)\beta(x)$ является бесконечно малой, как сумма трех бесконечно малых функций $c\alpha(x)$, $b\beta(x)$ и $\alpha(x)\beta(x)$. Равенство (1.17) показывает, что функция $f(x)\varphi(x)$ представлена как сумма числа bc и бесконечно малой функции $c\alpha(x)+b\beta(x)+\alpha(x)\beta(x)$. Следовательно, на основании теоремы 2, число bc является пределом функции $f(x)\varphi(x)$. Итак,

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)\varphi(x)\right]=bc=\lim_{x\to+\infty}f(x)\cdot\lim_{x\to+\infty}\varphi(x).$$

С л е д с т в и е. *Постоянный множитель можно выносить за знак предела, т.е.*

$$\lim_{x\to+\infty}\left[k\cdot\varphi(x)\right]=k\lim_{x\to+\infty}\varphi(x),$$

где k – постоянный множитель.

Доказательство. В самом деле,

$$\lim_{x\to+\infty}\left[k\cdot\varphi(x)\right]=\lim_{x\to+\infty}k\cdot\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=k\cdot\lim_{x\to+\infty}\varphi(x),$$

так как $\lim\limits_{x\to+\infty}k=k$.

Теорема 4 справедлива для любого конечного числа сомножителей, в частности, если эти сомножители равны между собой, то имеем:

$$\lim_{x\to+\infty}\left\{\left[f(x)\right]^n\right\}=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)\cdot f(x)\ldots f(x)\right]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}f(x)\cdot\lim_{x\to+\infty}f(x)\ldots\lim_{x\to+\infty}f(x)=\left[\lim_{x\to+\infty}f(x)\right]^n.$$

Это кратко формулируют так: *предел степени равен степени предела.*

Теорема 5. *Если* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=c$ и $c\neq 0$, то $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ *имеет предел при* $x\to+\infty$, *причем* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)}{\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)}$, *т.е. предел дроби равен пределу числителя, деленному на предел знаменателя, если предел знаменателя не равен нулю.*

Доказательство. По теореме 1 имеем $f(x)=b+\alpha(x)$, $\varphi(x)=c+\beta(x)$, где $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ - бесконечно малые функции при $x\to+\infty$.

Рассмотрим разность

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}-\frac{b}{c}=\frac{b+\alpha(x)}{c+\beta x}-\frac{b}{c}=\frac{c\alpha(x)-b\beta(x)}{c^2+c\beta(x)}=\gamma(x),$$

$\gamma(x)$ - бесконечно малая функция при $x\to+\infty$. Тогда $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\dfrac{b}{c}+\gamma(x)$. Поэтому, на основании теоремы 2, $f(x)/\varphi(x)$ имеет при $x\to+\infty$ предел, равный b/c:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{b}{c}=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)}{\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)}.$$

Теорема о пределах суммы, произведения и частного облегчают нахождение пределов.

Пример 1.16. Найти предел функции $y=x^4+3x^2+4$ при $x\to 2$.

Решение. Имеем

$$\lim_{x\to 2}\left(x^4+3x^2+4\right)=\lim_{x\to 2}x^4+\lim_{x\to 2}3x^2+\lim_{x\to 2}4.$$

Здесь мы воспользовались теоремой о пределе суммы.

Далее, так как предел степени равен степени предела, то

$$\lim_{x\to 2}x^4=\left[\lim_{x\to 2}x\right]^4=2^4=16;\ \lim_{x\to 2}3x^2=3\lim_{x\to 2}x^2=3\left[\lim_{x\to 2}x\right]^2=3\cdot 2^2=12.$$

Замечая, наконец, что $\lim\limits_{x\to 2}4=4$, получим

$$\lim_{x\to 2}\left(x^4+3x^2+4\right)=16+12+4=32.$$

Пример 1.17. Найти $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-6x+8}$.

Решение. Здесь непосредственно теорему о пределе дроби применить нельзя, так как предел знаменателя при $x\to 4$ равен нулю:

$$\lim_{x\to 4}\left(x^2-6x+8\right)=\lim_{x\to 4}x^2-6\lim_{x\to 4}x+8=4^2-6\cdot 4+8=0.$$

Кроме того, числитель дроби имеет предел, также равный нулю. Поэтому нахождение предела этой дроби сводится, как говорят, к раскрытию неопределенности *$0/0$. Для этого преобразуем дробь, разложив числитель и знаменатель на множители:

$$\frac{x^2-5x+4}{x^2-6x+8}=\frac{(x-1)(x-4)}{(x-2)(x-4)}.$$

Разделим числитель и знаменатель дроби на $x-4$. Это сокращение допустимо, так как при разыскании предела рассматриваются значения $x\neq 4$.

Итак, для всех значений $x\neq 4$ имеет место тождество

$$\frac{(x-1)(x-4)}{(x-2)(x-4)}=\frac{x-1}{x-2}.$$

Поэтому пределы этих функций равны между собой:

$$\lim_{x\to 4}\frac{(x-1)(x-4)}{(x-2)(x-4)}=\lim_{x\to 4}\frac{x-1}{x-2}=\frac{\lim\limits_{x\to 4}(x-1)}{\lim\limits_{x\to 4}(x-2)}=\frac{4-1}{4-2}=\frac{3}{2}.$$

Пример 1.18. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5x^2+6x+1}{6x^2+4x+2}$.

Решение. Здесь непосредственно применить теорему о пределе дроби нельзя, так как ни числитель, ни знаменатель дроби не имеют предела при $x\to+\infty$, одновременно стремясь к бесконечности. Таким образом, мы здесь имеем дело с неопределенностью вида ∞/∞. Для того чтобы найти предел данной дроби, предварительно преобразуем ее, разделив числитель и знаменатель на x^2; дробь от этого не изменит своей величины, а следовательно, и своего предела. После этого преобразования предел уже найти легко:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^2+6x+1}{6x^2+4x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5+\dfrac{6}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{6+\dfrac{4}{x}+\dfrac{2}{x^2}}=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(5+6/x+1/x^2\right)}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(6+4/x+2/x^2\right)}=\frac{5}{6}.$$

Обобщая разобранные примеры, можно сделать следующий вывод: *При $x\to\pm\infty$ предел отношения двух многочленов одинаковых степеней равен отношению коэффициентов при старших степенях x. Если же степени многочленов не равны, то предел их отношения равен нулю, если степень числителя меньше степени знаменателя, и равен бесконечности, если степень числителя больше степени знаменателя.*

В заключение этого пункта приведем еще две теоремы о пределах без доказательств.

Теорема 6. *Пусть даны три функции $\varphi(x)$, $f(x)$, $g(x)$, удовлетворяющие неравенствам $\varphi(x)\le f(x)\le g(x)$ для достаточно больших*

---

* Если при отыскании предела дроби $f(x)/\varphi(x)$ числитель и знаменатель стремятся одновременно к нулю или бесконечности, то будем говорить, что эта дробь представляет *неопределенность* вида $0/0$ или соответственно ∞/∞. Нахождение предела такой дроби условимся называть $0/0$ раскрытием вида $0/0$ или ∞/∞.

значений x. Если функции $\varphi(x)$ и $g(x)$ *имеют один и тот же предел при* $x \to +\infty$*, то и функция* $f(x)$*, заключенная между ними, имеет предел, равный пределу функций* $\varphi(x)$ и $g(x)$.

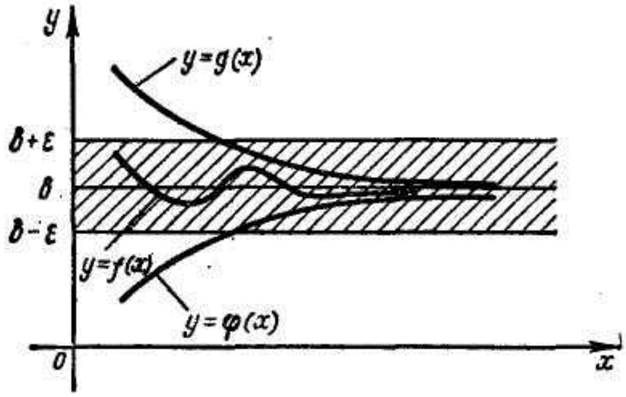


Рис. 1.4

Теорема 7. *Если функция* $y = f(x) \geq 0$ *для всех достаточно больших значений x и при* $x \to +\infty$ *имеет предел, то этот предел не может быть отрицательным.*

1.3.6. Первый замечательный предел

Часто приходится иметь дело с пределом функции $\dfrac{\sin x}{x}$ при $x \to 0$. Как мы увидим, он равен 1. Предварительно докажем, что $\lim\limits_{x\to 0}\sin x = 0$, а $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$.

Пусть $0 < x < \pi/2$. Рассмотрим окружность единичного радиуса (рис. 1.5). Дуга $\overset{\cup}{AC}$ численно равна центральному углу *x*, выраженному в радианах, а отрезок *AB* численно равен $\sin x$. Так как $0 < AB < AC$ (рис. 1.5), то

$$0 < \sin x < x \tag{1.18}$$

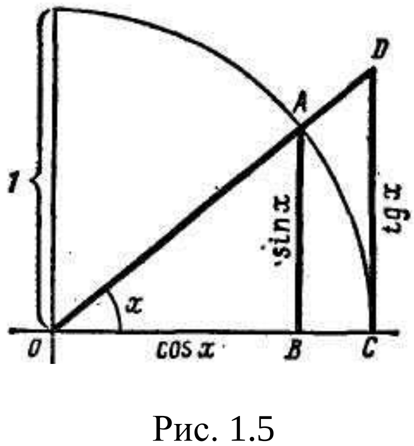


Рис. 1.5

Из неравенства (1.18) и теоремы 6 п. 1.3.6 следует, что при $x \to 0$ *.

$$\lim_{x\to 0}\sin x = 0 \qquad (1.19)$$

Докажем теперь, что $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$. Замечая, что $\cos x = 1 - 2\sin^2\frac{x}{2}$, получим

$$\lim_{x\to 0}\cos x = \lim_{x\to 0}\left(1 - 2\sin^2\frac{x}{2}\right) = 1 - 2\lim_{x\to 0}\sin^2\frac{x}{2} = 1 - 2\cdot 0 = 1.$$

Теперь перейдем к рассмотрению прела функции $\frac{\sin x}{x}$ при $x \to 0$. Так как предел знаменателя дроби равен нулю, то теорема о пределе дроби здесь неприменима **.

Из рисунка 1.5 непосредственно видно:

$$\text{пл. } \Delta OAB < \text{пл. сектора } OAC < \text{пл. } \Delta ODC; \qquad (1.20)$$

$$\text{пл. } \Delta OAB = \frac{\mathrm{OB}\cdot\mathrm{BA}}{2} = \frac{\cos x\cdot\sin x}{2}; \text{ пл. сектора } OAC =$$

$$= \frac{1}{2}R^2 x = \frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot x = \frac{x}{2}; \quad \text{пл. } \Delta ODC = \frac{OC\cdot CD}{2} = \frac{1\cdot tgx}{2} = \frac{tgx}{2}.$$

Подставим найденные выражения для площадей в неравенства (1.20):

$$\frac{\cos x\cdot\sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{tgx}{2}. \qquad (1.21)$$

Неравенства (1.21) справедливы для всех значений *x*, заключенных между нулем и $\pi/2$. Разделив все члены этих неравенств на $\frac{1}{2}\sin x$, получим

$$\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x},$$

или

$$\frac{1}{\cos x} > \frac{\sin x}{x} > \cos x. \qquad (1.22)$$

Неравенства (1.22) были выведены в предположении, что $x > 0$. Но они верны и при $x < 0$, так как $\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{\sin x}{x}$, $\cos(-x) = \cos x$, $\frac{1}{\cos(-x)} = \frac{1}{\cos x}$.

Выше мы видели, что $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$. Применив к частному $1/\cos x$ теорему о пределе дроби, получим $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\cos x} = \frac{1}{1} = 1$.

---

* Можно доказать, что формула (1.21) справедлива и в том случае, когда $x \to 0$, оставаясь отрицательным.

** поскольку при $x \to 0$ числитель дроби $\sin x$ тоже стремится к нулю, здесь имеет место неопределенность вида $0/0$.

Обе крайние функции $\cos x$ и $1/\cos x$ неравенство (1.22) при $x \to 0$ имеют одинаковый предел, равный единице. Но тогда функция $\dfrac{\sin x}{x}$, заключенная между функциями $\cos x$ и $1/\cos x$, согласно теореме 6, п. 1.3.6, имеет тот же предел при $x \to 0$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1. \tag{1.23}$$

С помощью этого предела находятся другие пределы.

Пример 1.19. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx}{x}$.

Решение. Числитель и знаменатель дроби при $x \to 0$ одновременно стремятся к нулю. Теорема о пределе дроби здесь неприменима. Для нахождения предела преобразуем данную дробь:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} = 1\cdot 1 = 1.$$

Пример 1.21. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

Решение. Имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2(x/2)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{2}\frac{\sin(x/2)}{x/2}\cdot\frac{\sin(x/2)}{x/2}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x/2)}{x/2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x/2)}{x/2} = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

1.3.7. Второй замечательный предел

Рассмотрим последовательность, общий член которой $y_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

Покажем, что эта последовательность возрастает и ограничена.

Полагая $a = 1,\ b = 1/n$, по формуле бинома Ньютона имеем

$$y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{1}{n^3} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}\frac{1}{n^n}.$$

Замечая, что

$$\frac{n(n-1)}{n^2} = 1 - \frac{1}{n}, \quad \frac{n(n-1)(n-2)}{n^3} = \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n} =$$

$$=\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right),\ \ldots,\ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots 2\cdot 1}{n^n}=$$

$$=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdot\frac{n-3}{n}\ldots\frac{\left[n-(n-1)\right]}{n}=$$

$$=\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)+\ldots,$$

получим

$$y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+1+\frac{1}{1\cdot 2}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots$$

$$\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

С увеличением n дроби $1/n,\ 2/n,\ 3/n,\ \ldots$ уменьшаются, а разности $1-\frac{1}{n},\ 1-\frac{2}{n},\ 1-\frac{3}{n},\ \ldots\ 1-\frac{n-1}{n}$ увеличиваются. Поэтому с увеличением n 3-й, 4-й и т.д. члены разложения увеличиваются; кроме того, при этом добавляются новые положительные слагаемые. Следовательно, $y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ с увеличением n возрастает. Итак, последовательность $\{y_n\}=\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ - возрастающая. Покажем, что она ограничена.

Если в разложении для y_n отбросить в скобках дроби $\frac{1}{n},\ \frac{2}{n},\ \ldots$, то каждое слагаемое, начиная с третьего, увеличится, и мы получим сумму, большую первоначальной:

$$y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\ldots n}.$$

Но

$$\frac{1}{2\cdot 3}<\frac{1}{2\cdot 2}=\frac{1}{2^2},\quad \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}<\frac{1}{2\cdot 2\cdot 2}=\frac{1}{2^3},\ \ldots$$

$$\ldots,\ \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\ldots n}<\frac{1}{\underbrace{2\cdot 2\cdot 2\ldots 2}_{n-1\ \text{множитель}}}=\frac{1}{2^{n-1}}.$$

Поэтому

$$y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}\right).$$

Сумму $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}$ найдем по формуле суммы членов убывающей геометрической прогрессии:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2.$$

Поэтому $y_n=\left(1-\frac{1}{n}\right)^n<1+2=3$. Итак, данная последовательность ограничена.

Следовательно, на основании признака существования предела возрастающей ограниченной последовательности заключаем, что последовательность с общим членом $y_n=\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ имеет предел. Этот предел играет большую роль в математике. Его называют числом *e*. Итак,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=e. \qquad (1.24)$$

Число *e* иррационально. Его приближенное значение с точностью до 10^{-6}: $e\approx 2{,}718282$.

Рассмотрим функцию $y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$. Можно доказать, что эта функция при непрерывном изменении *x* и стремлении его к $+\infty$ также имеет пределом число *e*:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e. \qquad (1.25)$$

Доказательства этого факта мы не приводим.

С помощью формулы (1.25) вычисляются многие пределы.

Пример 1.21. Показать, что $\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$.

Решение. Сделаем, как говорят, замену переменной, положив $x=-(t+1)$. Тогда очевидно, что $t\to+\infty$ при $x\to-\infty$. Поэтому

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{t\to+\infty}\left[1+\frac{1}{-(t+1)}\right]^{-(t+1)}=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t}{t+1}\right)^{-(t+1)}=$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t+1}{t}\right)^{t+1}=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t+1}=\lim_{t\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\cdot\left(1+\frac{1}{t}\right)\right]=$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\cdot\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)=e\cdot 1=e.$$

Итак,

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

Так как функция $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ имеет один и тот же предел как при $x\to+\infty$, так и при $x\to-\infty$, то часто пишут просто

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

Пример 1.22. Найти предел функции $y=(1+\alpha)^{1/\alpha}$ при $\alpha\to 0$.

Решение. Для отыскания предела сделаем замену переменной, полагая $1/\alpha=x$. Тогда $x\to\infty$ при $\alpha\to 0$. Поэтому

$$\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{1/\alpha}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

Пример 1.23. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x$.

Решение. Положим $x=2t$. При $x\to\infty$ и $t\to\infty$. Следовательно,

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2t}=\lim_{t\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\cdot\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right]=$$

$$=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t=e\cdot e=e^2.$$

В заключение отметим, что часто приходится рассматривать показательную функцию с основанием *e*, т.е. $y=e^x$.

К числу *e* приводят решения многих прикладных задач статистики, физики, биологии, химии и др., анализ таких процессов, как рост народонаселения, распад радия, размножение бактерий и т.п.

Рассмотрим **задачу о непрерывном начислении процентов.** Первоначальный вклад в банк составил Q_0 денежных единиц. Банк выплачивает ежегодно *p*% годовых. Необходимо найти размер вклада Q_t через *t* лет.

При использовании *простых процентов* размер вклада ежегодно будет увеличиваться на одну и ту же величину $\frac{p}{100}Q_0$, т.е. $Q_1=Q_0\left(1+\frac{p}{100}\right)$, $Q_2=Q_0\left(1+\frac{2p}{100}\right)$, …, $Q_t\left(1+\frac{pt}{100}\right)$. На практике значительно чаще применяются *сложные проценты*. В этом случае размер вклада ежегодно будет увеличиваться в одно и то же число $\left(1+\frac{p}{100}\right)$ раз, т.е.

$$Q_1=Q_0\left(1+\frac{p}{100}\right),\ Q_2=Q_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^2,\ \ldots,\ Q_t\left(1+\frac{p}{100}\right)^t.$$

Если начислять проценты по вкладам не один раз в году, а n раз, то при том же ежегодном приросте p% процент начисления за $\frac{1}{n}$ - ю часть года составит $\frac{p}{n}$%, а размер вклада за t лет при nt начислениях составит

$$Q_t = Q_0 \left(1 + \frac{p}{100n}\right)^{nt}. \tag{1.26}$$

Будем полагать, что проценты по вкладу начисляются каждое полугодие (n=2), ежеквартально (n=4), ежемесячно (n=12), каждый день (n=365), каждый час (n=8760) и т.д., непрерывно $(n \to \infty)$. Тогда размер вклада за t лет составит

$$Q_t = \lim_{n\to\infty}\left[Q_0\left(1+\frac{p}{100n}\right)^{nt}\right] = Q_0 \lim_{n\to\infty}\left[Q_0\left(1+\frac{p}{100n}\right)^{\frac{100n}{p}}\right]^{\frac{pt}{100}}$$

или при $x = \dfrac{100n}{p} \to \infty$

$$Q_t = Q_0 e^{\frac{pt}{e100}}. \tag{1.27}$$

Формула (1.27) выражает *показательный (экспоненциальный)* закон роста (при p>0). Она может быть использована при непрерывном начислении процентов.

Чтобы почувствовать результаты расчетов в зависимости от способа начисления процентов, в таблице в качестве примера приводятся размеры вкладов Q_t, вычисленные при $Q_0 = 1$ ден. ед., p=5%, t=20 лет.

	Формула простых процентов	*Формула сложных процентов*					*Формула непрерывного начисления процентов*
		n=1	n=2	n=4	n=12	n=365	
Размер вклада, ден. ед.	2,0000	2,6355	2,6851	2,7015	2,7126	2,7181	2,7182

Как видим, погрешность вычисления суммы вклада по формуле (1.30) непрерывного начисления процентов по сравнению с формулой (1.29) сложных процентов, начисляемых ежегодно (n=1), при одной и той же процентной ставке (p=5%) оказалась незначительной (около 2,5%).

З а м е ч а н и е . Хотя в практических финансово-кредитных операциях непрерывное начисление процентов применяется крайне редко, оно оказывается весьма эффективным при анализе сложных финансовых проблем, в частности при обосновании и выборе инвестиционных решений.

1.3.8. Сравнение бесконечно малых функций

Пусть функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ являются бесконечно малыми при $x \to +\infty$. Рассмотрим предел отношения этих функций при $x \to +\infty$ и введем следующие определения *.

Функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ называются *бесконечно малыми одного и того же порядка малости* при $x \to +\infty$, если $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ существует и не равен нулю.

Функция $\varphi(x)$ называется *бесконечно малой более высокого порядка малости,* чем функция $\psi(x)$ при $x \to +\infty$, если $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 0$.

Функция $\varphi(x)$ называется *бесконечно малой более низкого порядка малости,* чем $\psi(x)$ при $x \to +\infty$, если $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \infty$.

Функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ называются *несравнимыми бесконечно малыми* при $x \to +\infty$, если $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ существует и не равен ∞.

Пример 1.24. Функция $y = x^2$ является бесконечно малой при $x \to 0$ более высокого порядка малости, чем функция $y = 5x$, так как $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2}{5x} = \dfrac{1}{5} \lim\limits_{x \to 0} x = 0$. При приближении x к нулю функция $y = x^2$ стремится к нулю быстрее, чем функция $y = 5x$.

Пример 1.25. Функции $y = x^2 - 4$ и $y = x^2 - 5x + 6$ являются бесконечно малыми одного порядка малости при $x \to 2$, так как

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-3)} = \lim_{x \to 2} \frac{x+2}{x-3} = \frac{4}{-1} = -4 \neq 0.$$

Пример 1.26. Функции $\varphi(x) = \dfrac{\cos x}{x}$ и $\psi(x) = \dfrac{1}{x}$ являются несравнимыми бесконечно малыми при $x \to +\infty$, так как не существует предела их отношения $\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \cos x$.

Введем теперь понятие эквивалентных бесконечно малых функций.

Две функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, бесконечно малые при $x \to +\infty$, называются *эквивалентными* (или *равносильными*), если предел их отношения при $x \to +\infty$ равен единице *.

---

* Аналогичные определения вводятся при $x \to -\infty$, при $x \to x_0$ справа и слева, а также при $x \to x_0$.

* См. сноску на с. 99.

Из определения следует, что эквивалентные бесконечно малые функции имеют одинаковый порядок малости.

Например, функции x, $\sin x$, tgx являются эквивалентными бесконечно малыми функциями при $x \to 0$, так как $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=1$ (см. п. 1.3.7).

Пусть $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ - эквивалентные бесконечно малые функции при $x \to x_0$: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=1$. Тогда для значений *x*, близких к x_0, имеет место приближенное равенство $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\approx 1$, или $\varphi(x)\approx\psi(x)$, точность которого возрастает с приближением *x* к x_0.

Так как $\sin x$ и x –эквивалентные бесконечно малые при $x \to 0$, то для *x*, близких к нулю, $\sin x \approx x$. Эти обстоятельством широко пользуются, заменяя при малых *x* величину $\sin x$ аргументом *x*.

Так, например, если $x = 0{,}1$, то $\sin x = \sin 0{,}1 = 0{,}0998 \approx 0{,}1$.

Если $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ - эквивалентные бесконечно малые функции, то это обозначают так: $\varphi(x)\sim\psi(x)$.

Теорема 1. *Пусть* $\varphi(x)\sim\varphi_1(x)$ *и* $\psi(x)\sim\psi_1(x)$ *при* $x\to+\infty$. *Если существует* $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)}$, *то существует и* $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, *и оба эти предела равны между собой.*

Кратко эта теорема формулируется следующим образом: *предел отношения двух бесконечно малых функций равен пределу отношения эквивалентных им функции.*

Доказательство. Имеем

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\varphi(x)}{\varphi_1(x)}\cdot\frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)}\cdot\frac{\psi_1(x)}{\psi(x)}\right]=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\varphi(x)}{\varphi_1(x)}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{\psi_1(x)}{\psi(x)}=1\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)}\cdot 1=\lim_{x\to+\infty}\frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)}.$$

Доказанная теорема позволяет во многих случаях упрощать отыскание предела.

Пример 1.27. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{tg3x}$.

Решение. Так как $\sin 5x \sim 5x$, $tg3x\sim 3x$ при $x\to 0$, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{tg3x}=\lim_{x\to 0}\frac{5x}{3x}=\frac{5}{3}.$$

В заключение этого параграфа приведем признак эквивалентности двух бесконечно малых функций.

Теорема 2. *Бесконечно малые функции* $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$ *эквивалентны тогда и только тогда, когда их разность есть бесконечно малая функция более высокого порядка малости, чем* $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$.

Доказательство. Пусть $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ - бесконечно малые функции, например, при $x \to +\infty$, и $\beta(x) = \varphi(x) - \psi(x)$.

1. Покажем, что если $\varphi(x) \sim \psi(x)$, то $\beta(x)$ - бесконечно малая функция более высокого порядка малости, чем $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, т.е. что $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\beta(x)}{\varphi(x)} = 0$ и $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\beta(x)}{\psi(x)} = 0$. В самом деле,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\beta(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\varphi(x)-\psi(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to+\infty}\left[1-\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}\right] =$$

$$= 1 - \lim_{x\to+\infty}\frac{\psi(x)}{\varphi(x)} = 1 - 1 = 0.$$

Аналогично доказывается, что

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\beta(x)}{\psi(x)} = 0.$$

2. Пусть, обратно, $\beta(x)$ - бесконечно малая функция более высокого порядка малости, чем $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. Докажем, что $\varphi(x) \sim \psi(x)$, т.е. что $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 1$.

Действительно, так как $\beta(x) = \varphi(x) - \psi(x)$, то $\varphi(x) = \beta(x) + \psi(x)$. Следовательно,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\beta(x)+\psi(x)}{\psi(x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\beta(x)}{\psi(x)} + 1 = 0 + 1 = 1,$$

так как $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\beta(x)}{\psi(x)}$ по условию равен нулю.

Теорема 3. *Сумма конечного числа бесконечно малых функций различных порядков эквивалентна слагаемому низшего порядка.*

Доказательство. Рассмотрим для определенности сумму трех бесконечно малых функций при $x \to +\infty$: $F(x) = f(x) + \varphi(x) + g(x)$. Пусть, например, $f(x)$ - бесконечно малая функция низшего порядка малости, чем остальные слагаемые. Это значит, что

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\varphi(x)}{f(x)} = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{f(x)} = 0.$$

Тогда

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{f(x)}=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)+\varphi(x)+g(x)}{f(x)}\right]=$$

$$=1+\lim_{x\to+\infty}\frac{\varphi(x)}{f(x)}+\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{f(x)}=1+0+0=1.$$

Следовательно, сумма $f(x)+\varphi(x)+g(x)$ - бесконечно малая функция, эквивалентная функции $f(x)$.

Пример 1.28. Найти

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x+6x^2}{\sin x+tg^2 x}.$$

Решение. Так как при $x\to 0$ по теореме 3 имеем $5x+6x^2 \sim 5x$, а $\sin x+tg^2 x \sim \sin x$, то, применяя теорему 1, получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x+6x^2}{\sin x+tg^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{5x}{\sin x}=5.$$

1.4. Непрерывные функции

1.4.1. Непрерывность функции в точке. Точка разрыва

Представление о непрерывности функции интуитивно связано у нас с тем, что ее графиком является плавная, нигде не прерывающаяся линия. При рассмотрении графика такой функции $y=f(x)$ мы видим, что близким значениям аргумента соответствуют близкие значения функции; если независимая переменная x приближается к точке x_0, то значение функции $y=f(x)$ неограниченной приближается к значению функции в точке x_0 (рис. 1.6).

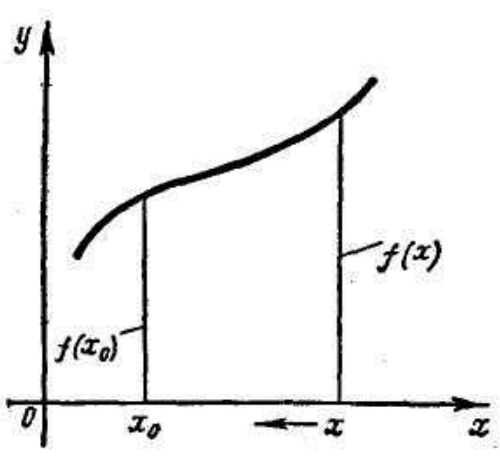


Рис. 1.6

Дадим теперь строгое определение непрерывности функции.

Функция $y = f(x)$ *называется непрерывной в точке* x_0, *если:*

1) *функция определена в точке* x_0 *и в некоторой ее окрестности, содержащей эту точку;*

2) *функция имеет предел при* $x \to x_0$*;*

3) *предел функции при* $x \to x_0$ *равен значению функции в точке* x_0*:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \tag{1.28}$$

Если в точке x_0 функция непрерывна, то точка x_0 называется *точка непрерывности* данной функции.

Замечание 1. Формулу (1.31) можно записать в виде

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \to x_0} x\right), \tag{1.29}$$

так как $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$. Формула (1.29) означает, что при нахождении предела непрерывной функции можно переходить к пределу под знаком функции.

Замечание 2. Часто приходится рассматривать непрерывность функции в точке x_0 справа или слева (т.е. одностороннюю непрерывность). Пусть функция $y = f(x)$ определена в точке x_0. Если $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = f(x_0)$, то говорят, что функция $y = f(x)$ *непрерывна* в точке x_0 *справа*; если $\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x) = f(x_0)$, то функция называется *непрерывной* в точке x_0 *слева.*

Введем теперь понятие точки разрыва.

Точка x_0 называется *точкой разрыва* функции $y = f(x)$, если она принадлежит области определения функции или ее границе и не является точкой непрерывности*

В этом случае говорят, что при $x = x_0$ функция разрывна. Это может произойти, если в точке x_0 функция не определена, или не существует предел функции при $x \to x_0$, или, наконец, если предел функции существует, но не равен значению функции в точке x_0:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0).$$

Пример 1.29. Рассмотрим функцию $y = 5x^3$. Докажем, что она непрерывна в точке $x = 2$. Для этого надо показать, что в точке $x = 2$ выполнены все три условия, входящие в определение непрерывной функции, т.е. что: 1) функция определена в точке $x = 2$ и в некоторой ее окрестности; 2)

---

* Точка x_0 называется *граничной точкой* области определения функции, если любая окрестность этой точки содержит как точки области определения функции, так и точки, не принадлежащие области определения. Совокупность всех граничных точек называется *границей* области. Так, например, для функции $y = 1/\sqrt{1-x^2}$ областью определения является интервал $[-1,\ 1]$, а ее граница состоит из двух точек $x = -1$ и $x = 1$.

существует $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ и 3) этот предел равен значению функции в точке $x=2$. Так как функция $f(x)=5x^3$ определена на всей числовой оси, то первое условие автоматически выполняется. Далее, $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2} 5x^3=40$. Итак, второе условие выполнено. Замечая, наконец, что $f(2)=40$, мы видим, что $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)$, т.е. и третье условие, определяющее непрерывность функции в точке $x=2$, выполнено. Таким образом, функция $y=5x^3$ непрерывна в точке $x=2$. Аналогично можно показать, что эта функция непрерывна в любой точке числовой оси.

Пример 1.30. Рассмотрим функцию

$$f(x)=\begin{cases} x-1, & \text{если } 0\le x<3; \\ 3-x, & \text{если } 3\le x\le 4, \end{cases}$$

приведенную в примере 1.7 п. 1.3.3. Эта функция определена во всех точках сегмента $[0,\ 4]$ и ее значение при $x=3$ равно 0 (см. график функции на рисунке 1.3). Однако в точке $x=3$ функция претерпевает разрыв, так как она не имеет предела при $x\to 3$: $\lim\limits_{x\to 3-0} f(x)=2$, а $\lim\limits_{x\to 3+0} f(x)=0$. Следует заметить, что функция $f(x)$ непрерывна во всех точках сегмента $[0,\ 4]$, за исключением точки $x=3$. При этом в точке $x=0$ она непрерывна справа, а в точке $x=4$ - непрерывна слева (см. замечание 2 п. 1.7.1), так как

$$\lim_{x\to 0+0} f(x)=\lim_{x\to 0+0}(x-1)=f(0)=-1,$$

$$\lim_{x\to 4-0} f(x)=\lim_{x\to 4-0}(3-x)=f(x)=-1.$$

Пример 1.31. Функции $y=1/x$ и $y=1/x^2$ (рис. 1.7) разрывны в граничной точке области определения $x=0$, так как они не определены в этой точке. Функции $y=1/x$ и $y=1/x^2$ являются бесконечно большими функциями при $x\to 0$. Поэтому говорят, что в точке $x=0$ эти функции имеют бесконечный разрыв.

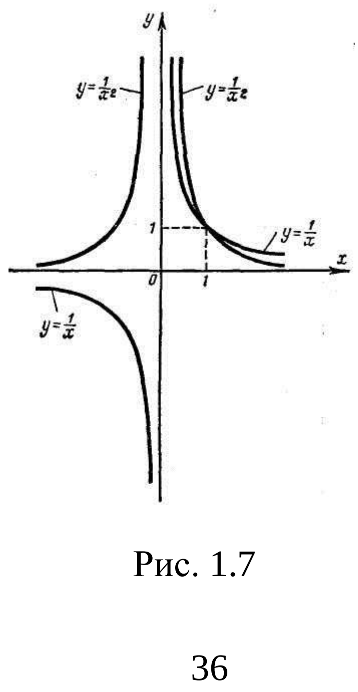


Рис. 1.7

Точки разрыва функции можно разбить на два типа.

Точка разрыва x_0 функции $f(x)$ называется *точкой разрыва* I *рода,* если существуют оба односторонних предела $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$. Точка разрыва, не являющаяся точкой I рода, называется *точкой разрыва* II *рода.*

Функция $f(x)$, приведенная в примере 1.31, имеет в точке $x = 3$ разрыв I рода, так как для нее существуют пределы при $x \to 3$ справа и слева.

Функция $y = 1/x$ и $y = 1/x^2$, рассмотренные в примере 3, в точке $x = 0$ имеют разрыв II рода, так как эти функции при $x \to 0$ не имеют предела ни справа, ни слева.

Пример 1.32. Функция $y = \sin\frac{1}{x}$ определена для всех значений *x*, кроме $x = 0$. В этой точке она имеет разрыв. Точка $x = 0$ есть точка разрыва II рода, так как при $x \to 0$ как справа, так и слева, функция $\sin\frac{1}{x}$, колеблясь между -1 и 1, не приближается ни к какому значению. График ее приведен на рисунке 1.8.

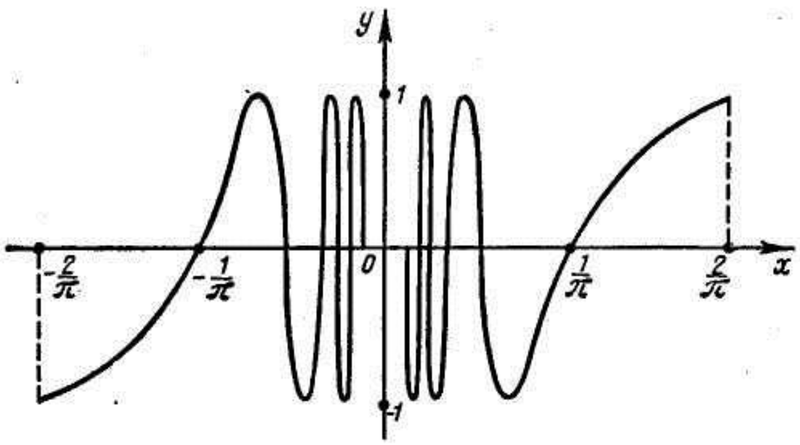


Рис. 1.8

Пример 1.33. Функция $\frac{\sin x}{x}$ не определена в точке $x = 0$. Точка $x = 0$ является точкой разрыва I рода, так как при $x \to 0$ существуют пределы справа и слева:

$$\lim_{x \to 0+0} \frac{\sin x}{x} = 1, \qquad \lim_{x \to 0-0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Если доопределить функцию $\frac{\sin x}{x}$ в точке $x = 0$, полагая $f(0) = 1$, то получим уже непрерывную функцию, определенную так:

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}, \text{ если } x \neq 0; \; f(0) = 1.$$

Доопределив функцию в точке $x = 0$, мы устранили разрыв.

Точка x_0 разрыва I рода, в которой $\lim_{x\to x_0+0} f(x) = \lim_{x\to x_0-0} f(x)$, называется *точкой устранимого разрыва.*

Пусть x_0 - точка разрыва I рода. *Скачком* функции в точке x_0 называют разность $\lim_{x\to x_0+0} f(x) - \lim_{x\to x_0-0} f(x)$. Так функция, рассмотренная в примере 1.31, имеет в точке $x_0 = 3$ скачок, равный $0-2=-2$.

В заключение этого пункта отметим одно свойство функции, непрерывной в точке. *Если непрерывная в точке x_0 функция $f(x)$ имеет в точке x_0 положительное (отрицательное) значение, то она остается положительной (отрицательной) во всех точках некоторой окрестности точки x_0.*

В самом деле, пусть, например, $f(x_0) > 0$ возьмем такое $\varepsilon > 0$, что $f(x_0) - \varepsilon > 0$. Так как $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ (в силу непрерывности функции в точке x_0), то на основании определения предела функции при $x \to x_0$ (см. п. 1.6.3)

$$\underset{N,M}{\exists}\left(N < x_0 < M\right)\underset{x}{\forall}\left(x\in[N,M]\right) \Rightarrow \left\{\left|f(x) - f(x_0)\right| < \varepsilon\right\} \Leftrightarrow \left\{f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon\right\}$$

Но так как $f(x_0) - \varepsilon > 0$, то и $f(x) > 0$ для всех точек интервала $[N, M]$. Итак, функция $f(x)$ положительна в некоторой окрестности точки x_0.

2. ПРОИЗВОДНАЯ

2.1. Приращение аргумента и приращение функции

Пусть дана функция $y = f(x)$. Рассмотрим два значения ее аргумента: исходное x_0 и новое x.

Разность $x - x_0$ называется *приращением аргумента x в точке* x_0 (кратко – приращением аргумента) и обозначается символом Δx (читается: «дельта икс»).

Аналогично, разность $y - y_0 = f(x) - f(x_0)$ называется *приращением функции* $y = f(x)$ *в точке* x_0 (кратко – приращением функции) и обозначается символом Δy (читается: «дельта игрек»)*. Величины Δx и Δy показаны на рисунке 2.1. Таким образом,

$$\Delta x = x - x_0, \tag{2.1}$$

$$\Delta y = y - y_0 = f(x) - f(x_0), \tag{2.2}$$

или

$$x = x_0 + \Delta x,\ \ y = y_0 + \Delta y. \tag{2.3}$$

* Нельзя рассматривать Δx как произведение Δ на *x*; это единый символ. То же самое относится к Δy.

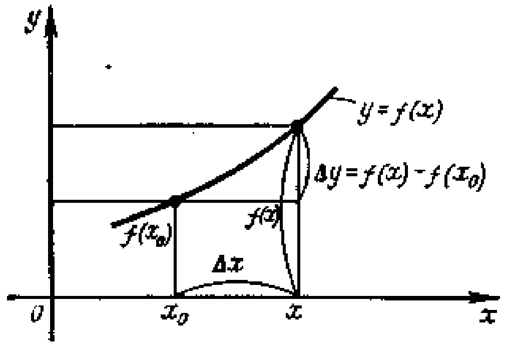


Рис. 2.1

Подставляя в формулу (2.2) выражение для x из равенства (2.3), получим

$$\Delta y = f\left(x_0 + \Delta x\right) - f\left(x_0\right). \qquad (2.4)$$

Как правило, в тех случаях, когда вводятся Δx и Δy, исходное значение аргумента x_0 считается фиксированным, а новое значение x – переменным. Тогда $y_0 = f\left(x_0\right)$ оказывается постоянной, $y = f\left(x\right)$ - переменной. Приращения Δy и Δx также будут переменными. Формула (1.4.) показывает, что переменная Δy является функцией переменной Δx.

Пример 2.1. Для функции $y = x^2$ в точке x_0 найти приращение функции Δy, соответствующее приращению аргумента Δx.

Решение. По формуле (1.4) имеем

$$\Delta y = f\left(x_0 + \Delta x\right) - f\left(x_0\right) = \left(x_0 + \Delta x\right)^2 - x_0^2 = 2x_0\Delta x + \Delta x^2.$$

2.2. Определение непрерывности функции с помощью понятий приращения аргумента и приращения функции

Согласно определению непрерывности функции функция $y = f\left(x\right)$ называется непрерывной в точке x_0, если

$$\lim_{x \to x_0} f\left(x\right) = f\left(x_0\right). \qquad (2.5)$$

При этом предполагалось, что функция $f\left(x\right)$ определена в точке x_0 и некоторой ее окрестности.

Это определение можно сформулировать, пользуясь понятиями приращения функции и приращения аргумента. Действительно, формула (2.5), очевидно, равносильна равенству

$$\lim_{x \to x_0}\left[f\left(x\right) - f\left(x_0\right)\right] = 0. \qquad (2.5')$$

Полагая $x - x_0 = \Delta x$ и $f\left(x\right) - f\left(x_0\right) = \Delta y$ и замечая, что при $x \to x_0$ $\Delta x \to 0$ (и, обратно, при $\Delta x \to 0$ $x \to x_0$), вместо соотношения (2.5’) мы получим следующую формулу, равносильную формуле (2.5):

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0. \qquad (2.6)$$

Иными словами, *функция* $y = f(x)$ *непрерывна в точке* x_0 *тогда и только тогда, когда бесконечно малому приращению аргумента* Δx *соответствует бесконечно малое приращение функции* Δy.

З а м е ч а н и е. Если в точке x_0 функция $y = f(x)$ терпит разрыв, то при $\Delta x \to 0$ Δy либо стремится к пределу, отличному от нуля, либо не имеет предела.

2.3. Задача о производительности труда

Пусть функция $u = u(t)$ выражает количество произведенной продукции *u* за время *t* и необходимо найти производительность труда в момент t_0.

За период времени от t_0 до $t_0 + \Delta t$ количество произведенной продукции изменится от значения $u_0 = u(t_0)$ до значения $u_0 + \Delta u = u(t_0 + \Delta t)$, тогда средняя производительность труда за этот период времени $z_{cp} = \frac{\Delta u}{\Delta t}$. Очевидно, что *производительность труда в момент* t_0 можно определить как предельное значение средней производительности за период времени от t_0 до $t_0 + \Delta t$ при $\Delta t \to 0$, т.е.

$$z = \lim_{\Delta t \to 0} z_{cp} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta t}. \qquad (2.7)$$

2.4. Определение производной

Производной функции $y = f(x)$ *в точке* x_0 *называется предел отношения приращения функции* Δy *в этой точке к вызвавшему его приращению аргумента* Δx *при произвольном стремлении* Δx *к нулю.*

Производная функции $y = f(x)$ в точке x_0 обозначается символом $f'(x_0)$.

Итак, по определению,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \qquad (2.8)$$

или

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \qquad (2.9)$$

Для одной и той же функции $f(x)$ производную можно вычислять в различных точках *x*. Пусть *M* – множество всех таких значений *x*. Правило, по которому каждому $x \in M$ соответствует производная в этой точке $f'(x)$, представляет собой новую функцию, определенную на множестве *M*. Эта функция называется производной от функции $f(x)$ и обозначается $f'(x)$ (читается: «эф штрих от икс»)[*].

Таким образом, производная функции $f(x)$ в точке x_0 является значением функции $f'(x)$ в точке x_0.

Наряду с обозначением $f'(x)$ для производной функции употребляются и другие обозначения, например: y', y'_x, $\left[f(x)\right]'_x$.

Пример 2.2. Найти производную функции $y = x^2$.

Решение. Находим приращение функции Δy:

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2.$$

Пользуясь определением производной и считая *x* фиксированным, получим

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

Таким образом, производная функции x^2 равна 2*x*: $\left(x^2\right)' = 2x$. Эта производная определена на всей числовой оси, так как при ее нахождении значение *x* было выбрано произвольно.

2.5. Дифференцируемость функции

Функция $y = f(x)$, имеющая производную в точке x_0, называется *дифференцируемой в этой точке.* Функция $y = f(x)$ называется *дифференцируемой в интервале* $[a, b]$, если она дифференцируема в каждой точке этого интервала.

Например, функция $y = x^2$ дифференцируема (т.е. имеет производную) в любой точке *x*, следовательно, ее можно назвать дифференцируемой в бесконечном интервале $[-\infty, +\infty]$, т.е. на всей числовой оси.

Докажем следующую теорему, устанавливающую связь между дифференцируемостью и непрерывностью функции.

Т е о р е м а. *Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то она в этой точке непрерывна.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть аргумент *x* получает в точке x_0 приращение Δx, не равное нулю. Ему соответствует некоторое приращение

---

[*] Иногда для определенности производную функции $y = f(x)$ мы будем называть производной функции *y* по *x*, или производной функции $f(x)$ по *x*.

функции Δy. Рассмотрим очевидное тождество $\Delta y = \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta x$. Переходя к пределу, получим:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta x \right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = f'(x) \cdot 0 = 0,$$

откуда и следует, согласно п. 2.2, непрерывность функции $y = f(x)$ в точке x_0.

Обратная теорем неверна: существуют непрерывные функции, которые в некоторых точках не являются дифференцируемыми.

Рассмотрим пример. Функция $y = \sqrt[3]{x}$ непрерывна на всей числовой оси и, в частности, при $x = 0$. Покажем, что в точке $x = 0$ эта функция не имеет производной. В самом деле, в точке $x = 0$ приращению аргумента Δx соответствует приращение функции

$$\Delta y = \sqrt[3]{0 + \Delta x} - \sqrt[3]{0} = \sqrt[3]{\Delta x}.$$

Следовательно,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x^2}}.$$

Переходя к пределу, получим

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x^2}} = +\infty.$$

Это значит, что функция $y = \sqrt[3]{x}$ в точке $x = 0$ не имеет производной.

2.6. Геометрический смысл производной

В этом пункте мы выясним геометрический смысл производной, что окажется очень полезным при усвоении многих понятий математического анализа и при решении некоторых геометрических задач.

С этой целью введем определение касательной к кривой в данной точке.

Пусть на плоской кривой *C* задана точка M_0. Рассмотри другую точку *M* этой кривой и проведем секущую M_0M (рис. 2.2). Если точка *M* начинает перемещаться по кривой *C*, а точка M_0 остается неподвижной, то секущая

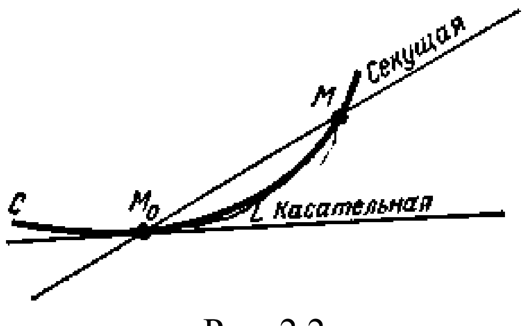


Рис. 2.2

меняет свое положение. Допустим, что существует прямая *L*, проходящая через точку M_0, которая обладает следующим свойством: если точка *M* при перемещении ее по кривой *C* неограниченно приближается к точке M_0 (с любой ее стороны), то угол между прямой *L* и секущей M_0M стремится к нулю. Тогда эта прямая *L* называется касательной к кривой *C* в точке M_0.

Кратко говоря, *касательная есть прямая, занимающая предельное положение секущей.*

З а м е ч а н и е . Аналогично определяется касательная и к пространственной кривой.

Рассмотрим теперь график непрерывной функции $y = f(x)$, имеющей в точке M_0 с абсциссой x_0 невертикальную касательную (рис. 2.3). Найдем ее угловой коэффициент $k = tg\alpha$, где α - угол касательной с осью *Ox*. Для этого проведем через точку M_0 и точку *M* графика с абсциссой $x_0 + \Delta x$ секущую. Ее угловой коэффициент

$$k_{сек} = tg\beta = \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

где β - угол секущей с осью *Ox* (см. рис. 4). При $\Delta x \to 0$ в силу непрерывности функции Δy также стремится к нулю, и поэтому точка *M*, перемещаясь по графику, неограниченно приближается к точке M_0. При этом секущая неограниченно приближается к касательной, т.е. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \beta = \alpha$ и, следовательно, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} tg\beta = tg\alpha$. Поэтому угловой коэффициент касательной

$$k = tg\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} tg\beta = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Итак, *угловой коэффициент касательной к графику функции в точке с абсциссой* x_0 *равен значению производной этой функции в точке* x_0*:*

$$k_{кас} = f'(x_0). \tag{2.10}$$

З а м е ч а н и е . Мы показали, что если график непрерывной функции

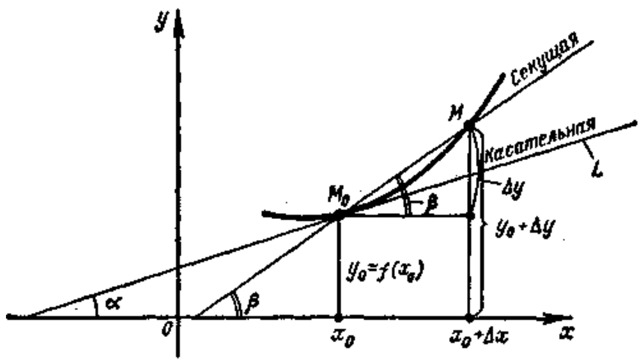


Рис. 2.3

$y = f(x)$ имеет невертикальную касательную в точке с абсциссой x_0, то в этой точке существует производная $f'(x_0)$, равная угловому коэффициенту касательной $k_{кас}$. Можно показать, что и обратно, если в точке x_0 функция имеет производную, то ее график в точке с абсциссой x_0 имеет невертикальную касательную.

Пример 2.3. Найти угловой коэффициент касательной к параболе $y = x^2$ в точке $M_0(2;4)$.

Решение.

$$\left(x^2\right)'\Big|_{x=2} = 2x\big|_{x=2} = 4.$$

Угловой коэффициент касательной к графику функции к точке $M_0(2;4)$ равен значению производной этой функции в точке $x = 2$, т.е. $k = 4$.

2.7. Производные некоторых основных элементарных функций

Производная постоянной $y = C$. Так как функция $y = C$ сохраняет постоянное значение на всей числовой оси, то в произвольно выбранной точке x любому приращению аргумента Δx соответствует приращение функции Δy, равное нулю. Поэтому

$$(C') = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} = 0.$$

Итак,

$$(C)' = 0 \tag{2.11}$$

Производная степенной функции $y = x^n$ *с натуральным показателем n.* Пусть x – произвольно выбранная точка, Δx - приращение аргумента в этой точке и Δy - соответствующее приращение данной функции. Тогда по формуле бинома Ньютона

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{n-3}b^3 + \ldots + b^n$$

получим

$$\Delta y = (x+\Delta x)^n - x^n = x^n + nx^{n-1}\cdot\Delta x + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \ldots + (\Delta x)^n - x^n,$$

или

$$\Delta y = nx^{n-1}\cdot\Delta x + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \ldots + (\Delta x)^n.$$

Следовательно,

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \ldots + (\Delta x)^n}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} \Delta x + \ldots + (\Delta x)^{n-1} \right] = nx^{n-1}.$$

Таким образом,

$$\left(x^n\right)' = nx^{n-1}. \tag{2.12}$$

Производная касательной функции $y = a^x$. Давая приращение Δx произвольно выбранному значению аргумента x, получим следующее приращение показательной функции:

$$\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x \left(a^{\Delta x} - 1\right).$$

Следовательно,

$$\left(a^x\right)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^x\left(a^{\Delta x} - 1\right)}{\Delta x} = a^x \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \ln a,$$

так как $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = \ln a$.

Таким образом,

$$\left(a^x\right)' = a^x \cdot \ln a. \tag{2.13}$$

В частности, при $a = e$ получим

$$\left(e^x\right)' = e^x, \tag{2.14}$$

так как $\ln e = 1$.

Производная логарифмической функции $y = \log_a x$. Возьмем любое значение x из области определения логарифмической функции и дадим ему приращение Δx, тогда приращение функции

$$\Delta y = \log_a(x + \Delta x) - \log_a x = \log_a \frac{x + \Delta x}{x} = \log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right).$$

Поэтому

$$\left(\log_a x\right)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}.$$

Для того чтобы найти этот предел, сделаем следующее преобразование:

$$\frac{\log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \frac{1}{x} \cdot \frac{\log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}}.$$

Принимая во внимание, что величина x постоянна и что при $\Delta x \to 0$ также и $\dfrac{\Delta x}{x} \to 0$, то, принимая во внимание, что

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log_a(1 + x)}{x} = \log_a e,$$

получим

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{1}{x}\cdot\frac{\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}}\right]=\frac{1}{x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}}=\frac{1}{x}\log_a e.$$

Итак, $(\log_a x)'=\frac{1}{x}\log_a e$, или, поскольку $\log_a e=\frac{1}{\ln a}$, окончательно имеем

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}. \tag{2.15}$$

В частности, при $a=e$ получим

$$(\ln x)'=\frac{1}{x}, \tag{2.16}$$

так как $\log_e e=\ln e=1$.

Производные функции $y=\sin x$ и $y=\cos x$. Пусть Δx - приращение произвольно выбранного значения аргумента x функции $y=\sin x$. Тогда приращение этой функции

$$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right).$$

Следовательно,

$$(\sin x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=\cos x,$$

так как по формуле $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, то и $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=1$, а $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=\cos x$.

Таким образом,

$$(\sin x)'=\cos x. \tag{2.17}$$

Аналогично выводится формула для производной функции $y=\cos x$:

$$(\cos x)'=-\sin x. \tag{2.18}$$

2.8. Основные правила дифференцирования

Основные правила дифференцирования сформулируем в следующих теоремах (без доказательств).

Т е о р е м а 1. *Если функции* $u = u(x)$ *и* $v = v(x)$ *дифференцируемы в данной точке x, то в той же точке дифференцируема и их сумма, причем производная суммы равна сумме производных слагаемых:*

$$(u+v)' = u' + v'. \tag{2.19}$$

З а м е ч а н и е. Формула (1.21) легко обобщается на случай любого конечного числа слагаемых:

$$(u+v+\ldots+t)' = u' + v' + \ldots + t'. \tag{2.20}$$

Пример 2.4. Найти производную функции $y = x^3 + \sin x + \ln x$.

Решение. Применяя сначала формулу (2.20), а затем формулы (2.12), (2.17) и (2.16), получим

$$y' = \left(x^3 + \sin x + \ln x\right)' = \left(x^3\right)' + (\sin x)' + (\ln x)' = 3x^2 + \cos x + \frac{1}{x}.$$

Т е о р е м а 2. *Если функции* $u = u(x)$ *и* $v = v(x)$ *дифференцируемы в данной точке x, то в той же точке дифференцируемо и их произведение. При этом производная произведения находится по следующей формуле:*

$$(uv)' = u'v + uv'. \tag{2.21}$$

С л е д с т в и е. *Постоянный множитель можно вынести за знак производной:*

$$(cu)' = cu'. \tag{2.22}$$

Действительно, если $v = c$ (c – постоянная), то по формуле (2.21)

$$(cu)' = (c)'u + cu' = 0 \cdot u + c \cdot u' = cu'.$$

В частности, можно выносить за знак производной множитель, равный –1, что равносильно вынесению минуса за знак производной:

$$(-u)' = -u'. \tag{2.23}$$

На этом основании можно получить формулу для производной разности двух функций:

$$(u-v)' = u' - v'. \tag{2.24}$$

Пример 2.5. Найти производную функции $y = e^x \cos x$.

Решение. По формулам (2.21), (2.14) и (2.18) получим

$$y' = \left(e^x \cos x\right)' = \left(e^x\right)' \cdot \cos x + e^x (\cos x)' = e^x \cos x + e^x(-\sin x) = e^x(\cos x - \sin x).$$

Пример 2.6. Найти производную многочлена $y = x^3 - 3x^2 + 5x + 2$.

Решение. Применяя последовательно формулы (2.20), (2.22), (2.12) и (2.11), получим

$$y' = \left(x^3 - 3x^2 + 5x + 2\right)' = \left(x^3\right)' + \left(-3x^2\right)' + (5x)' + (2)' =$$

$$= 3x^2 - 3\left(x^2\right)' + 5(x)' + 0 = 3x^2 - 3 \cdot 2x + 5 \cdot 1 = 3x^2 - 6x + 5.$$

З а м е ч а н и е. Формулу (2.21) можно обобщить на случай любого конечного числа n сомножителей. Если, например, n=3, то

$$(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'. \tag{2.25}$$

В самом деле,

$$(uvw)' = \left[(uv)w\right]' = (uv)'w + uvw' = u'vw + uv'w + uvw'.$$

Т е о р е м а 3. *Если в данной точке x функции* $u = u(x)$ *и* $v = v(x)$ *дифференцируемы и* $v \neq 0$*, то в той же точке дифференцируемо и их частное* u/v*, причем*

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}. \tag{2.26}$$

Найдем производную функции $y = tgx$.

Представив данную функцию в виде частного $y = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, по формуле (2.26) получим:

$$y' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos x\cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Таким образом,

$$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}. \tag{2.27}$$

При этом условие $v = \cos x$ $x \neq 0$ выполняется для любого x, принадлежащего области определения функции tgx.

Аналогично выводится формула для производной функции $y = ctgx$:

$$(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}. \tag{2.28}$$

2.9. Производная обратной функции

Пусть функция $x = f(y)$ монотонна и дифференцируема в некотором интервале и имеет в точке y этого интервала производную $f'(y)$, не равную нулю. Покажем, что в соответствующей точке x обратная функция $y = f^{-1}(x)$ имеет производную $\left[f^{-1}(x)\right]'$, причем

$$\left[f^{-1}(x)\right]' = \frac{1}{f'(y)}. \tag{2.29}$$

Так как по условию функция $x = f(y)$ монотонна и дифференцируема (а следовательно, и непрерывна), то по теореме о существовании обратной функции функция $y = f^{-1}(x)$ существует, монотонна и непрерывна. Дадим аргументу x приращение $\Delta x \neq 0$. Тогда функция $y = f^{-1}(x)$ получит приращение Δy, которое в силу ее монотонности будет отличным от нуля. Кроме того, вследствие непрерывности функции $y = f^{-1}(x)$ при $\Delta x \to 0$ приращение Δy также стремится к нулю. Следовательно,

$$\left[f^{-1}(x)\right]' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{1}{\dfrac{\Delta x}{\Delta y}} \right) = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{f'(y)}.$$

Формулу (2.29) можно записать в таком виде:

$$y'_x = \frac{1}{x'_y}. \qquad (2.30)$$

2.10. Производные обратных тригонометрических функций

Найдем производную функции $y = \arcsin x$. Рассмотрим обратную функцию $x = \sin y$; эта функция в интервале $-\pi/2 < y < \pi/2$ монотонна и дифференцируема, а ее производная $x' = \cos y$ в этом интервале в нуль не обращается.

Следовательно, по формуле (2.30) получим $y'_x = 1/x'_y = 1/\cos y$. Но $\cos y = \sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-x^2}$ *. Таким образом, $y' = 1/\sqrt{1-x^2}$, т.е.

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \qquad (2.31)$$

Аналогично найдем производную функции $y = arctgx$. Эта функция по определению должна удовлетворять условию $-\pi/2 < y < \pi/2$. При этом обратная функция $x = tgy$ монотонна и дифференцируема. По формуле (2.27) находим $x'_y = 1/\cos^2 y$. Следовательно, согласно формуле (2.30) имеем $y'_x = \cos^2 y$. Но $\cos^2 y = 1/\left(1+tg^2 y\right) = 1/\left(1+x^2\right)$. Поэтому $y' = 1/\left(1+x^2\right)$, или

$$(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}. \qquad (2.32)$$

Приведем формулы для производных функций $y = \arccos x$ и $y = arctgx$:

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad (2.33)$$

$$(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}. \qquad (2.34)$$

---

* Знак «плюс» перед корнем выбран потому, что $\cos y$ в интервале $-\pi/2 < y < \pi/2$ положителен.

2.11. Производная сложной функции

Пусть $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$. Тогда y есть сложная функция x: $y = f\left[\varphi(x)\right]$, а переменная u – промежуточный аргумент.

Как найти производную сложной функции y'_x, зная производную y'_u и производную промежуточного аргумента u'_x? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Т е о р е м а. *Если функция* $u = \varphi(x)$ имеет производную u'_x *в точке x, а функция* $y = f(u)$ имеет производную y'_u *в соответствующей точке u, то сложная функция* $y = f\left[\varphi(x)\right]$ в данной точке x имеет производную y'_x, которая находится по следующей формуле:

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x. \qquad (2.35)$$

Часто пользуются менее точной, но более короткой формулировкой этой теоремы: *производная сложной функции равна произведению производной данной функции по промежуточному аргументу на производную промежуточного аргумента.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Дадим x приращение Δx. Тогда u и y получат соответственно приращения Δu и Δy.

Предположим, что Δu при $\Delta x \to 0$ не принимает значений, равных нулю. Тогда имеет место тождество

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}. \qquad (2.36)$$

Переходя в равенстве (2.36) к пределу при $\Delta x \to 0$, получим

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Так как функция $u = \varphi(x)$ дифференцируема, а следовательно, и непрерывна, то при $\Delta x \to 0$ также $\Delta u \to 0$. Поэтому

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u}.$$

Следовательно,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Но $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = y'_x$, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta u}{\Delta x} = u'_x$, $\lim\limits_{\Delta u \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta u} = y'_u$. Поэтому

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x.$$

Что и требовалось доказать.

Можно показать, что формула (2.35) оказывается верной и в случае, когда Δu при $\Delta x \to 0$ принимает значения, равные нулю.

Пример 2.7. Найти производную функции $y = \sin x^3$.

Решение. Данная функция – сложная. Введя обозначение $u = x^3$, получим $y = \sin u$. По формуле (1.37) находим

$$y'_x = (\sin u)'_u \cdot (x^3)'_x = \cos u \cdot 3x^2,$$

Или, поскольку $u = x^3$,

$$y'_x = \cos x^3 \cdot 3x^2 = 3x^2 \cos x^3.$$

Сложная функция может быть составлена не из двух звеньев, как это было в только что рассмотренном примере, а из большего их числа. В таких случаях необходимо ясно представить себе, какое из действий, приводящих к значению сложной функции, является последним. При дифференцировании сложной функции та величина, над которой совершается последнее действие, принимается за промежуточный аргумент *u*.

Пример 2.8. Найти производную функции $y = \ln arctgx^2$.

Решение. Для данной функции последним действием является взятие натурального логарифма. Это действие совершается над функцией $arctgx^2$. Поэтому принимаем за промежуточный аргумент $u = arctgx^2$. Тогда $y = \ln u$. Найдем производную y' по формуле (1.37):

$$y'_x = (\ln u)'_u \cdot \left(arctgx^2\right)'_x = \frac{1}{u}\left(arctgx^2\right)'_x = \frac{1}{arctgx^2} \cdot \left(arctgx^2\right)'_x.$$

Дифференцирование не закончено, так как не найдена производная функции $arctgx^2$. Эта функция также сложная, и последним действием для нее является нахождение арктангенса от x^2. Поэтому, применяя повторно формулу (2.35) и полагая в ней уже $u = x^2$, получим

$$\left(arctgx^2\right)'_x = (arctgu)'_u \cdot \left(x^2\right)'_x = \frac{1}{1+u^2} \cdot 2x = \frac{1}{1+\left(x^2\right)^2} \cdot 2x = \frac{2x}{1+x^4}.$$

Окончательно имеем

$$y' = \frac{1}{arctgx^2} \cdot \frac{2x}{1+x^4} = \frac{2x}{\left(1+x^4\right) \cdot arctgx^2}.$$

При достаточном навыке буква *u* для обозначения промежуточного аргумента не вводится. Вот как, например, могут быть найдены производные только что рассмотренных сложных функций:

$$\left(\sin x^3\right)' = \cos x^3 \cdot \left(x^3\right)' = \cos x^3 \cdot 3x^2 = 3x^2 \cos x^3.$$

Аналогично

$$\left(\ln\ arctgx^2\right)' = \frac{1}{arctgx^2}\left(arctgx^2\right)' = \frac{1}{arctgx^2} \cdot \frac{1}{1+\left(x^2\right)^2} \cdot \left(x^2\right)' =$$

$$= \frac{1}{arctgx^2} \cdot \frac{1}{1+x^4} \cdot 2x = \frac{2x}{\left(1+x^4\right) arctgx^2}.$$

2.12. Производная степенной функции с любым показателем

В п. 2.7 была введена формула производной степенной функции $y = x^n$ при натуральном *n*. Найдем производную степенной функции $y = x^n$ с любым действительным показателем *n*. Считая *x* положительным, воспользуемся тождеством $x^n = e^{n\ln x}$*. Тогда $y = e^{n\ln x}$ есть сложная функция *x*, и ее производная находится по формуле (2.35):

$$y' = \left(e^{n\ln x}\right)' = e^{n\ln x} \cdot \left(n\ln x\right)' = e^{n\ln x} \cdot \frac{n}{x}.$$

Так как $e^{n\ln x} = x^n$, то

$$y' = x^n \cdot \frac{n}{x} = nx^{n-1}.$$

Результат получится такой же, как при натуральном показателе (см. формулу (2.12)):

$$\left(x^n\right)' = nx^{n-1}.$$

Можно показать, что если при $x < 0$ функция $y = x^n$ существует, то формула (2.12) также остается справедливой.

2.13. Сводная таблица формул дифференцирования

I. $y = C;\ y' = 0.$	VIII. $y = ctgx;\ y' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}.$
II. $y = x^n;\ y' = nx^{n-1}.$	IX. $y = \arcsin x;\ y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$
III. $y = a^x;\ y' = a^x \ln a.$	X. $y = \arccos x;\ y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$
III’. $y = e^x;\ y' = e^x.$	XI. $y = arctgx;\ y' = \dfrac{1}{1+x^2}.$
IV. $y = \log_a x;\ y' = \dfrac{1}{x\ln a}.$	XII. $y = arcctgx;\ y' = -\dfrac{1}{1+x^2}.$
IV’. $y = \ln x;\ y' = \dfrac{1}{x}.$	XIII. $y = shx;\ y' = chx.$
V. $y = \sin x;\ y' = \cos x.$	XIV. $y = chx;\ y' = shx.$
VI. $y = \cos x;\ y' = -\sin x.$	XV. $y = thx;\ y' = \dfrac{1}{ch^2 x}.$
VII. $y = tgx;\ y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}.$	XVI. $y = cthx;\ y' = -\dfrac{1}{sh^2 x}.$

* Справедливость этого тождества легко устанавливается логарифмированием обеих его частей по основанию *e*.

2.14. Уравнения касательной и нормали к кривой

Касательная к графику функции $y = f(x)$ в некоторой его точке $M_0(x_0; y_0)$, где $y_0 = f(x_0)$, есть прямая, проходящая через эту точку и имеющая угловой коэффициент $k_{кас}$, равный $f'(x_0)$ (см. п. 2.6). Поэтому уравнение этой касательной можно найти, воспользовавшись уравнением прямой, проходящей через данную точку $y - y_0 = k(x - x_0)$ или

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0). \qquad (2.37)$$

Нормалью к кривой называется прямая, проходящая через точку касания перпендикулярно касательной (рис. 2.4).

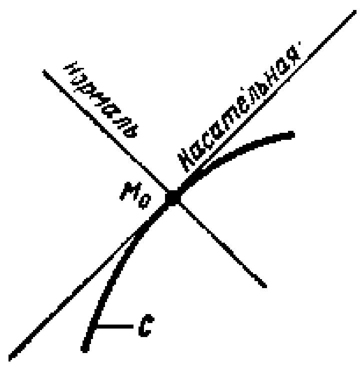


Рис. 2.4

Рассмотрим график функции $y = f(x)$; пусть $M_0(x_0; y_0)$ - одна из его точек. Тогда уравнение нормали к графику функции в данной точке $M_0(x_0; y_0)$ имеет вид

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0), \qquad (2.38)$$

так как угловой коэффициент нормали $k_н$ связан с угловым коэффициентом касательной $k_{кас} = f'(x_0)$ условием перпендикулярности:

$$k_н = -\frac{1}{k_{кас}} = -\frac{1}{f'(x_0)}.$$

Пример 2.9. Найти уравнение касательной и нормали к графику функции $y = tgx$ в точке с абсциссой $x_0 = \pi/4$.

Решение. Найдем ординату точки касания: $y_0 = tgx_0 = tg(\pi/4) = 1$. Дифференцируем данную функцию: $(tgx)' = 1/\cos^2 x$ и находим угловой коэффициент касательной $k_{кас} = 1/\cos^2 x\big|_{x=\pi/4} = 2$ и угловой коэффициент нормали $k_н = -1/2$. По формулам (2.37) и (2.38) находим уравнения касательной и нормали:

$$y-1=2\left(x-\frac{\pi}{4}\right),\ y-1=-\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right).$$

2.15. Экономический смысл производной. Использование понятия производной в экономике

Было установлено, что производительность труда есть производная объема произведенной продукции по времени.

Рассмотрим еще одно понятие, иллюстрирующее *экономический смысл производной.*

Издержки производства *у* будем рассматривать как функцию количества выпускаемой продукции *х.* Пусть Δx — прирост продукции, тогда Δy — приращение издержек производства и $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ - среднее приращение издержек производства на единицу продукции. Производная $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ выражает **предельные издержки** *производства и характеризует приближенно дополнительны затраты на производство единицы дополнительной продукции.*

Предельные издержки зависят от уровня производства (количества выпускаемой продукции) *х* и определяются не постоянными производственными затратами, а лишь переменными (на сырье, топливо и т.п.). Аналогичным образом могут быть определены *предельная выручка, предельный доход, предельный продукт, предельная полезность, предельная производительность* и другие предельные величины.

Применение дифференциального исчисления к исследованию экономических объектов и процессов на основе анализа этих пре дельных величин получило название *предельного анализа.* Предельные величины характеризуют не состояние (как суммарная или средняя величины), а *процесс, изменение экономического объекте* Таким образом, *производная выступает как скорость изменения некоторого экономического объекта (процесса) по времени или относительно другого исследуемого фактора.* Следует учесть, однако, что экономика не всегда позволяет использовать предельные величины в силу неделимости многих объектов экономических расчетов и прерывности (дискретности) экономических показателей В (времени (например, годовых, квартальных, месячных и т.д.). Вместе с тем в ряде случаев можно отвлечься от дискретности показателей и эффективно использовать предельные величины.

Рассмотрим в качестве примера **соотношения между средним[1] предельным доходом[1]** в условиях монопольного и конкурентное рынков.

Суммарный доход (выручку) от реализации продукции r можно определить как произведение цены единицы продукции p на | количество продукции q, т.е. $r=pq$.

[1] В экономической литературе предельные величины называют также маржинальными. При их записи к обычному обозначению величин добавляется буква *М;* при записи средних величин добавляется буква *А* (от англ *average* — средняя). Например, *MR* — предельный доход, *АК* — средний доход.

В условиях монополии одна или несколько фирм полностью контролируют предложение определенной продукции, а следовательно, цены на них. При этом, как правило, с увеличением цены спрос на продукцию падает. Будем полагать, что это происходит по прямой, т.е. кривая спроса $p(q)$ — есть линейная убывающая функция $p = aq + b$, где $a < 0$, $b > 0$. Тогда суммарный доход от реализованной продукции составит $r = (aq+b)q = aq^2 + bq$ (рис. 2.5). В этом случае средний доход на единицу продукции $r_{ср} = \frac{r}{q} = aq + b$, а предельный доход, т.е. дополнительный доход от реализации единицы дополнительной продукции, составит $r_q^{'} = 2aq + b$ (рис. 2.5). Следовательно, *в условиях монопольного рынка с ростом количества реализованной продукции предельный доход снижается, что приводит к уменьшению (с меньшей скоростью) среднего дохода.*

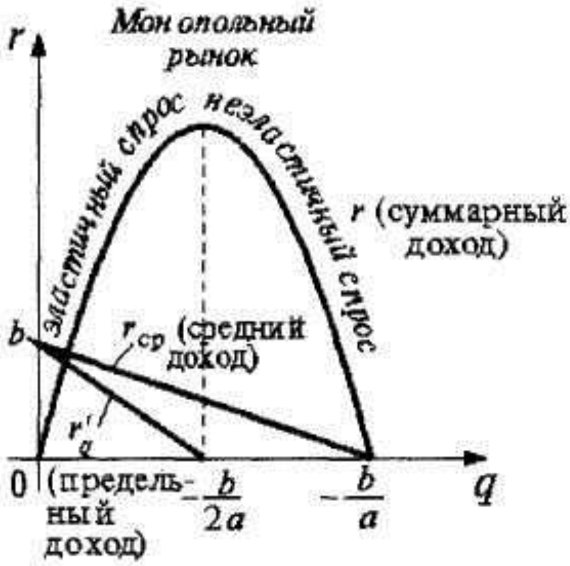


Рис. 2.5

В условиях с о в е р ш е н н о й к о н к у р е н ц и и, когда число участников рынка велико и каждая фирма не способна контролировать уровень цен, устойчивая продажа товаров возможна по преобладающей рыночной цене, например, $p=b$. При этом суммарный доход составит $r = pq$ и соответственно средний доход $r_{ср} = \frac{r}{q} = b$ и предельный доход $r_q^{'} = b$ (рис. 2.6).

Таким образом, *в условиях свободного конкурентного рынка* в отличие от монопольного *средний и предельный доходы совпадают.*

Рис. 2.6

Для исследования экономических процессов и решения других прикладных задач часто используется понятие **эластичности функции.**

Определение. ***Эластичностью функции*** $E_x(y)$ *называется предел отношения относительного приращения функции y к относительному приращению переменной x при* $\Delta x \to 0$:

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{x}{y}\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y}\cdot y'. \qquad (2.39)$$

Эластичность функции показывает приближенно, на сколько процентов изменится функция $y = f(x)$ при изменении независимой переменной *x* на 1%.

Выясним геометрический смысл эластичности функции. По определению (2.39)

$$E_x(y) = \frac{x}{y}\cdot y' = \frac{x}{y} tg\alpha,$$

где $tg\alpha$ - тангенс угла наклона касательной в точке $M(x, y)$ (рис. 2.7). учитывая, что из треугольника *MBN* *MN* = *x tgα*, *MC*=*y*, а из подобия треугольников *MBN* и *AMC* $\frac{MN}{MC} = \frac{MB}{MA}$, получим $E_x(y) = \frac{MB}{MA}$, т.е. *эластичность функции (по абсолютной величине) равна отношению расстояний по касательной от данное точки графика функции до точек ее пересечения с осями Ox* и *Oy*. Если точки пересечения касательной к графику функции *A* и *B* находятся по одну сторону от точки *M,* то эластичность $E_x(y)$ положительна (см. рис. 2.7), если по разные стороны, то $E_x(y)$ отрицательна (рис. 2.8).

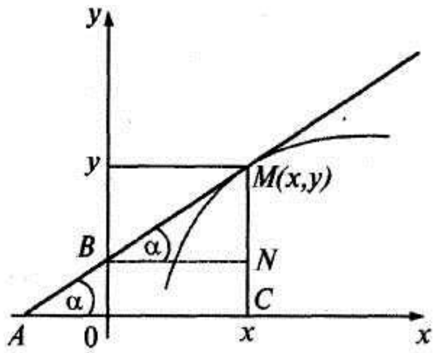


Рис. 2.7

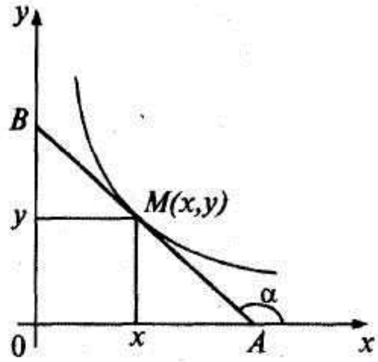


Рис. 2.8

Отметим свойства эластичности функции.

1. *Эластичность функции равна произведению независимой переменной x на темп изменения функции* $T_y = (\ln y)' = \dfrac{y'}{y}$, т.е.

$$E_x(y)=xT_y. \tag{2.40}$$

2. *Эластичность произведения (частного)* двух *функций равна сумме (разности) эластичностей этих функций:*

$$E_x(uv) = E_x(u) + E_x(v), \tag{2.41}$$

$$E_x\left(\frac{u}{v}\right) = E_x(u) - E_x(v). \tag{2.42}$$

3. *Эластичности взаимно обратных функций — взаимно обратные величины:*

$$E_x(y) = \frac{1}{E_y(x)}. \tag{2.43}$$

Эластичность функций применяется при анализе спроса и потребления. Например, эластичность спроса y относительно цены x (или дохода x) — коэффициент, определяемый по формуле (2.39) и показывающий приближенно, на сколько процентов изменится спрос (объем потребления) при изменении цены (или дохода) на 1%.

Если эластичность спроса (по абсолютной величине) $|E_x(y)| > 1$, то спрос считают *эластичным,* если $|E_x(y)| < 1$ — *неэластичным* относительно цены (или дохода). Если $|E_x(y)| = 1$, то говорят о спросе *с единичной эластичностью.*

Выясним, например, как влияет эластичность спроса относительно цены на суммарный доход $r = pq$ при реализации продукции. Выше мы предполагали, что кривая спроса $p = p(q)$ — линейная функция; теперь будем полагать, что $p=p(q)$ — произвольная функция. Найдем предельный доход

$$r_q' = (pq)_q' = p_q' \cdot q + p \cdot 1 = p\left(1 + \frac{q}{p}p_q'\right) = p\left(1 + E_q(p)\right).$$

Учитывая, что в соответствии с формулой (2.43) для эластичности взаимно обратных функций эластичность спроса относительно цены обратна эластичности цены относительно спроса, т.е. $E_q(p)=\dfrac{1}{E_p(q)}$, а также то, что $E_p(q)<0$, получим при произвольной кривой спроса

$$p_q^{'}=p\left(1-\frac{1}{\left|E_p(q)\right|}\right). \qquad (2.44)$$

Если спрос неэластичен, т.е. $\left|E_p(q)\right|<1$, то в соответствии с (2.44) предельный доход $r_q^{'}$ отрицателен при любой цене; если спрос эластичен, т.е. $\left|E_p(q)\right|>1$, то предельный доход $r_q^{'}$ положителен. Таким образом, для неэластичного спроса изменения цены и предельного дохода происходят в одном направлении, а для эластичного спроса — в разных. Это означает, что *с возрастанием цены для продукции эластичной спроса суммарный доход от реализации продукции увеличивается, а для товаров неэластичного спроса — уменьшается.* На рисунке 2.5 на кривых доходов выделены области эластичного и неэластичного спроса.

Пример 2.10. Зависимость между издержками производства y и объемом выпускаемой продукции x выражается функцией $y = 50x — 0,05\,x^3$ (ден. ед.). Определить средние и предельные издержки при объеме продукции 10 ед.

Решение. Функция средних издержек (на единицу продукции) выражается отношением $y_{ср}=\dfrac{y}{x}=50-0,05x^2$; при x = 10 средние издержки (на единицу продукции) равны $y_{ср}(10)=50-0,05\cdot 10^2=45$ (ден. ед.). Функция предельных издержек выражается производной $y'(x)$ = $50\text{-}0,15x^2$; при x = 10 предельные издержки составят $y'(10)$ = $50\text{-}0,15\text{-}10^2$ = 35 (ден. ед.). Итак, если средние издержки на производство единицы продукции составляют 45 ден. ед., то предельные издержки, т.е. дополнительные затраты на производство дополнительной единицы продукции при данном уровне производства (объеме выпускаемой продукции 10 ед.), составляют 35 ден. ед.

Пример 2.11. Зависимость между себестоимостью единицы продукции y (тыс. руб.) и выпуском продукции x (млрд. руб.) выражается функцией $y=-0,5x+80$. Найти эластичность себестоимости при выпуске продукции, равном 60 млн. руб.

Решение. По формуле (7.33) эластичность себестоимости

$$E_x(y)=\frac{-0,5x}{-0,5x+80}=\frac{x}{x-160}.$$

При x=60 $E_{x=60}(y)=-0,6$, т.е.при выпуске продукции, равном 60 млн. руб, увеличение его на 1% привел к снижению себестоимости на 0,6%.

Пример 2.12. Объем продукции u, произведенный бригадой рабочих, может быть описан уравнением $u=-\dfrac{5}{6}t^3+\dfrac{15}{2}t^2+100t+50$ (ед.), $1\le t\le 8$, где t –

рабочее время в часах. Вычислить производительность труда, скорость и темп её изменения через час после начала работы и за час до ее окончания.

Решение. Производительность труда выражается производной

$$z(t)=u'(t)=-\frac{5}{2}t^2+15t+100 \text{ (ед./ч}^2\text{)},$$

а скорость и темп изменения производительности – соответственно производной $z'(t)$ и логарифмической производной $T_z(t)=\left[\ln z(t)\right]'$:

$$z'(t)=-5t+15 \text{ (ед./ч}^2\text{)},$$

$$T_z(t)=\frac{z'(t)}{z(t)}=\frac{-5t+15}{-\frac{5}{2}t^2+15t+100}=\frac{2t-6}{t^2-6t-40} \text{ (ед./ч).}$$

В заданные моменты времени $t_1=1$ и $t_2=8-1=7$ соответственно имеем: $z(1)=112,5$ (ед./ч), $z'(1)=10$ (ед./ч^2), $T_z(1)=0,09$ (ед./ч) и $z(7)=82,5$ (ед./ч), $z'(7)=-20$ (ед./ч^2), $T_z(7)=-0,24$ (ед./ч).

Итак, к концу работы производительность труда существенно снижается; при этом изменение знака $z'(t)$ и $T_z(t)$ с плюса на минус свидетельствует о том, что увеличение производительности труда в первые часы рабочего дня сменяется ее снижением в последние часы.

Пример 2.13. Опытным путем установлены функции спроса $q=\frac{p+8}{p+2}$ и предложения $s=p+0,5$, где q и s – количество товара, соответственно покупаемого и предлагаемого на продажу в единицу времени, p – цена товара. Найти: а) равновесную цену, т.е. цену, при которой спрос и предложение уравновешиваются; б) эластичность спроса и предложения для этой цены; в) изменение дохода при увеличении цены на 5% от равновесной.

Решение. *а*) Равновесная цена определяется из условия $q=s$: $\frac{p+8}{p+2}=p+0,5$, откуда $p=2$, т.е. равновесная цена равна 2 ден. ед.

б) Найдем эластичности по спросу и предложению по формуле (2.39):

$$E_p(q)=-\frac{6p}{(p+2)(p+8)}; \qquad E_p(s)=\frac{2p}{2p+1}.$$

Для равновесной цены p = 2 имеем $E_{p=2}(q)$ = -0,3; $E_{p=2}(s)=0,8$.

Так как полученные значения эластичностей по абсолютной величине меньше 1, то и спрос и предложение данного товара при равновесной (рыночной) цене неэластичны относительно цены. Это означает, что изменение цены не приведет к резкому изменению спроса и предложения. Так, при увеличении цены p на 1% спрос уменьшится на 0,3%, а предложение увеличится на 0,8%.

в) При увеличении цены p на 5% от равновесной спрос уменьшается на 5-0,3 = 1,5%, следовательно, доход возрастает на 3,5%.

3. ПРАВИЛО ЛОПИТАЛЯ

Т е о р е м а. *Пусть* $f(x)$ и $\varphi(x)$ - *функции, дифференцируемые в некотором полуинтервале* $(a,b]$, *причем* $\varphi'(x)\neq 0$, *и пусть при* $x\to a+0$ *обе эти функции стремятся к нулю или обе стремятся к бесконечности. В таком случае, если отношение их производных имеет предел при* $x\to a+0$, *то этот же предел имеет и отношение самих функций* $f(x)/\varphi(x)$, *т.е.*

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}. \tag{3.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ограничимся доказательством для случая $\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=\lim\limits_{x\to a+0}\varphi(x)=0$. Доопределим функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ в точке a, полагая $f(a)=\varphi(a)=0$. Тогда эти функции станут непрерывными на сегменте $[a,b]$ и будут удовлетворять условиям теоремы Коши для любого сегмента $[a,x]$, где $a<x<b$. Поэтому

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{\varphi(x)-\varphi(a)}=\frac{f'(c)}{\varphi'(c)},$$

где $a<c<x$. Заметим, что c зависит от x, но при $x\to a+0$ величина c также стремится к a. Следовательно,

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a+0}\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}=\lim_{c\to a+0}\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}=\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Пример 3.1. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}$.

Решение. Имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin 5x)'}{x'}=\lim_{x\to 0}\frac{5\cos 5x}{1}=5\lim_{x\to 0}\cos 5x=5.$$

Если отношение производных опять представляет собой неопределенность вида $0/0$ или ∞/∞, то можно снова применить правило Лопиталя, т.е. перейти к отношению вторых производных и т.д.

Пример 3.2. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{x^2}$.

Решение. Здесь числитель и знаменатель одновременно стремятся к нулю. Применяя два раза правило Лопиталя, находим

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{4\sin 4x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{16\cos 4x}{2}=8\lim_{x\to 0}\cos 4x=8.$$

Пример 3.3. Найти $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2}{e^x}$.

Решение. Здесь числитель и знаменатель представляют собой бесконечно большие функции при $x\to+\infty$. Применяя два раза правило Лопиталя, находим

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x}=0.$$

Аналогично можно показать, что вообще

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a_0x^n+a_0x^{n-1}+...+a_n}{e^x}=0,$$

т.е. *многочлен любой степени растет медленнее показательной функции.*

З а м е ч а н и е. Согласно правилу Лопиталя, если существует предел отношения производных данных функций, то существует и предел отношения самих функций. Если же предел отношения производных не существует, то это еще не означает, что не существует предел отношения самих функций. Рассмотрим, например, две бесконечно большие функции при $x\to+\infty$: $f(x)=x+\sin x$ и $\varphi(x)=x$. Предел их отношения при $x\to+\infty$ существует, так как

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)=1.$$

Однако предел отношения производных данных функций

$$\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=\frac{(x+\sin x)}{(x)'}=1+\cos x$$

не существует, так как $\cos x$ при $x\to+\infty$ не имеет предела.

4. ПРИЛОЖЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ ФУНКЦИИ И ПОСТРОЕНИЮ ГРАФИКОВ

4.1. Необходимые и достаточные условия возрастания и убывания функции

Функция $y=f(x)$, определенная на сегменте (или интервале), называется *возрастающей* на этом сегменте (или интервале), если из неравенства $x_2>x_1$, где x_2 и x_1 - любые две точки, принадлежащие сегменту (или интервалу), следует неравенство $f(x_2)>f(x_1)$ (рис. 4.1).

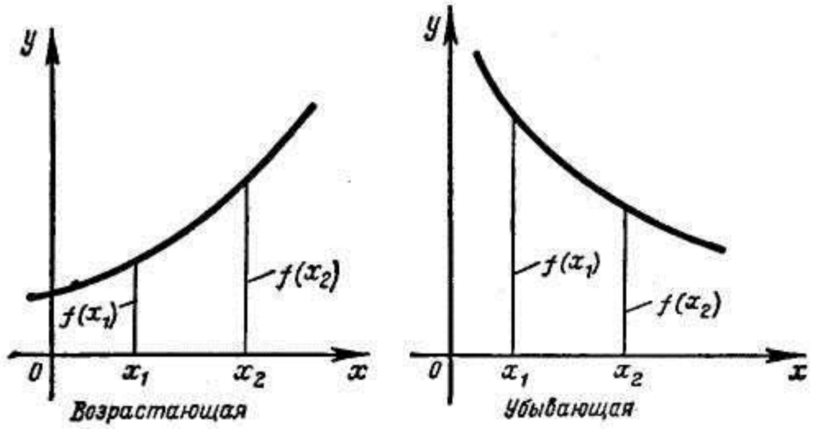


Рис. 4.1

Введя обозначения $x_2 - x_1 = \Delta x$ и $f(x_2) - f(x_1) = \Delta y$, замечаем, что Δx и Δy имеют одинаковые знаки. Следовательно, для возрастающей функции отношение приращений функции и аргумента всегда положительно, т.е. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} > 0$.

Функция $y = f(x)$, определенная на сегменте (или интервале), называется *убывающей* на этом сегменте (или интервале), если из неравенства $x_2 > x_1$, где x_2 и x_1 - любые две точки, принадлежащие сегменту (или интервалу), следует неравенство $f(x_2) < f(x_1)$ (см. рис. 4.1).

В этом случае приращения $\Delta x = x_2 - x_1$ и $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$ имеют разные знаки и поэтому для убывающей функции отношение приращений отрицательно, т.е. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} < 0$.

Установим необходимые и достаточные условия возрастания и убывания функции в интервале.

Т е о р е м а 1 (н е о б х о д и м о е у с л о в и е в о з р а с т а н и я ф у н к ц и и). *Если дифференцируемая в интервале* (a,b) *функция* $y = f(x)$ *возрастает, то ее производная не может быть отрицательной ни в одной точке данного интервала, т.е.* $f'(x) \geq 0$ *для* $a < x < b$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $y = f(x)$ - функция, возрастающая в интервале $]a,b[$. Рассмотрим две точки x и $x + \Delta x$, принадлежащие интервалу $]a,b[$. Тогда, как было указано выше, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} > 0$. Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, получим $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0$*. Так как по предположению функция дифференцируема, то $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$ и, следовательно, $f'(x) \geq 0$.

Подобным же образом доказывается следующая теорема.

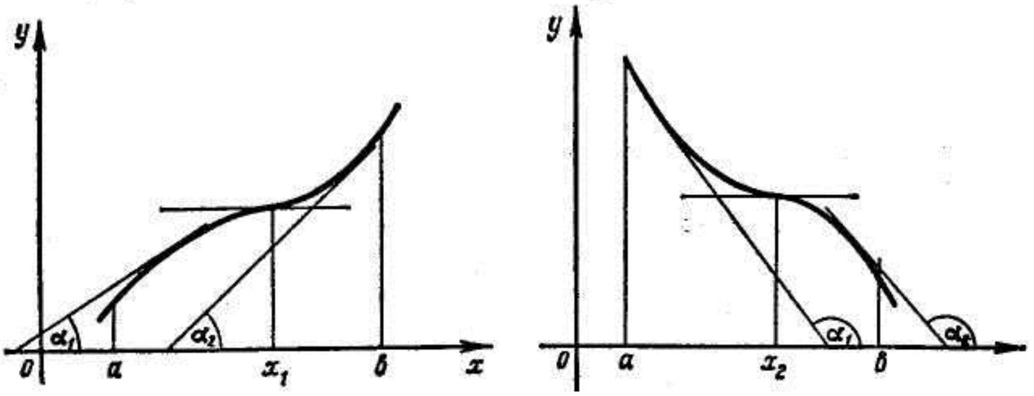
Т е о р е м а 2 (н е о б х о д и м о е у с л о в и е у б ы в а н и я ф у н к ц и и). *Если дифференцируемая в интервале* (a,b) *функция* $y = f(x)$ *убывает, то ее производная не может быть положительной ни в одной точке данного интервала, т.е.* $f'(x) \leq 0$ *для* $a < x < b$.

Рассмотренные теоремы можно наглядно иллюстрировать геометрически. Действительно, график возрастающей функции при движении вправо по оси абсцисс поднимается вверх. В таком случае касательные к графику образуют острые углы α с положительным направлением оси Ox или, быть может, в некоторых точках (например, в точке x_1) параллельны оси Ox (рис. 4.2, а).

---

* Так как предел положительной функции не может быть отрицательным

Так как тангенсы острых углов положительны (в тех точках, где касательные параллельны оси *Ox*, равны нулю) и так как по геометрическому смыслу производной $tg\alpha = f'(x)$, то для возрастающей функции $f'(x) \geq 0$.



а) б)

Рис. 4.2

Аналогично, если функция убывает (рис. 4.2, б), то касательные образуют с осью *Ox* тупые углы α или в некоторых точках (например, в точке x_2) параллельны оси *Ox*. Так как тангенсы тупых углов отрицательны, то для убывающей функции $f'(x) \leq 0$.

Теорема 3 (достаточное условие возрастания функции). *Если непрерывная на сегменте $[a,b]$ функция $y = f(x)$ в каждой внутренней точке этого сегмента имеет положительную производную, то эта функция возрастает на сегменте $[a,b]$.*

Доказательство. Пусть $f'(x) > 0$ для всех $a < x < b$. Рассмотрим два произвольных значения x_1 и x_2 из сегмента $[a,b]$, *причем* $x_2 > x_1$. Напишем формулу Лагранжа (4.3) применительно к сегменту $[x_1, x_2]$:

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f'(c), \ x_1 < c < x_2.$$

Во всех точках сегмента $[a,b]$ *производная* $f'(x) > 0$, поэтому и $f'(c) > 0$. Так как, кроме того, $x_2 - x_1 > 0$, то произведение $(x_2 - x_1) f'(c) > 0$ и, следовательно, $f(x_2) - f(x_1) > 0$. Отсюда $f(x_2) > f(x_1)$, т.е. функция $f(x)$ возрастает на сегменте $[a,b]$.

Подобным же образом доказывается следующая теорема.

Теорема 4 (достаточное условие убывания функции). *Если непрерывная на сегменте $[a,b]$ функция $y = f(x)$ в каждой внутренней точке этого сегмента имеет отрицательную производную, то эта функция убывает на сегменте $[a,b]$.*

Напомним, что функция только возрастающая или только убывающая в каком-либо интервале называется монотонно возрастающей или монотонно убывающей в этом интервале.

Пример 4.1. Определить интервалы монотонности функции $y = x^3 - 3x$.

Решение. Производная функции равна $y' = 3x^2 - 3$. Функция возрастает для всех значений *x*, при которых $y' > 0$. Решая неравенство $3x^2 - 3 > 0$, находим: $x > 1$ или $x < -1$. Таким образом, функция возрастает в интервалах $-\infty < x < -1$ и $1 < x < +\infty$. Убывает функция для значений *x*, при которых $y' < 0$. Решая неравенство $3x^2 - 3 < 0$, находим $x^2 < 1$, или $-1 < x < 1$. Функция убывает в интервале $-1 < x < 1$. График функции $y = x^3 - 3x$ изображен на рисунке 4.3.

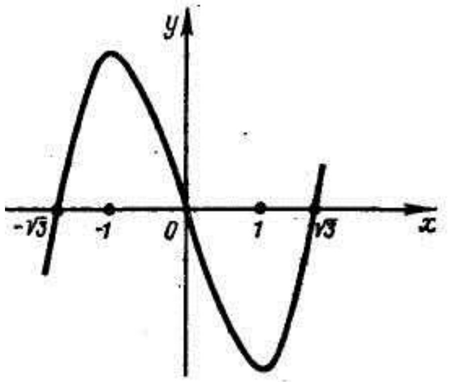


Рис. 4.3

4.2. Максимум и минимум функции

Рассмотрим график непрерывной функции $y = f(x)$, изображенный на рисунке 4.4. Как видно из рисунка, значение функции в точке x_1 больше значений функции во всех соседних точках как слева, так и справа от x_1. В этом случае говорят, что функция имеет в точке x_1 максимум. В точке x_3 функция, очевидно, также имеет максимум.

Функция $y = f(x)$ *имеет максимум в точке x=c, если существует такая окрестность точки x=c, что для всех точек* $x \neq c$, *принадлежащих этой окрестности, выполняется неравенство* $f(x) < f(c)$.

В точке x_2 значение функции меньше всех «соседних» значений. В этом случае говорят, что функция имеет в точке x_2 минимум. В точке x_4 функция, очевидно, также имеет минимум.

Функция $y = f(x)$ *имеет минимум в точке x=c, если существует такая окрестность точки x=c, что для всех точек* $x \neq c$, *принадлежащих этой окрестности, выполняется неравенство* $f(x) > f(c)$.

Максимум и минимум объединяются общим названием *экстремум* функции. Следует отметить, что если функция имеет в точке максимум, то это не означает, что в этой точке функция имеет наибольшее значение во всей области ее определения. Из определения максимума следует только то, что это самое большое значение функции в точках, достаточно близких к точке *c*. Так, на рисунке 4.4 функция в точке x_1 имеет максимум, хотя существуют точки, в которых значения функции больше, чем в точке x_1. Аналогичное замечание можно сделать относительно минимума функции. В частности, может оказаться, что минимум функции больше максимума (см. значения функции в точках x_1 и x_4 на рисунке 4.4).

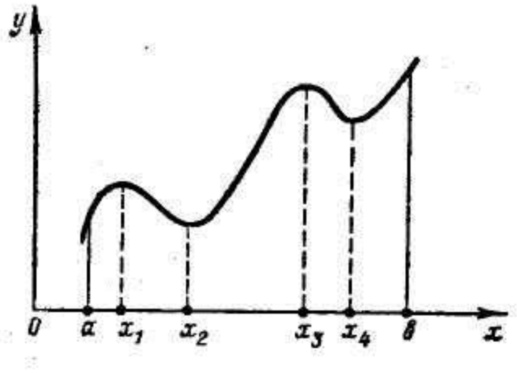


Рис. 4.4

Теорема (необходимый признак существования экстремума функции). *Если дифференцируемая в точке x=c функция* $y = f(x)$ *имеет в этой точке максимум или минимум, то ее производная при x=c обращается в нуль, т.е.* $f'(c) = 0$.

Доказательство. Пусть, например, функция $y = f(x)$ имеет в точке *c* максимум. Согласно определению максимума, должна существовать такая окрестность точки *c*, что для всех точек $x(x \neq c)$ этой окрестности $f(x) < f(c)$, т.е. $f(c)$ - наибольшее значение функции в этой окрестности. Так как по условию функция имеет в точке *c* производную $f'(c)$, то по теореме Ферма должно быть $f'(c) = 0$.

Подобным же образом доказывается теорема и для случая минимума функции.

До сих пор рассматривался только случай, когда функция $y = f(x)$ имела производную в точке экстремума. Могут, однако, встретиться случаи, когда в точках экстремума функция не имеет производной.

Так, например, для функции $f(x) = |x|$, график которой изображен на рисунке 4.5, в точке $x = 0$ не существует производной. Но очевидно, что в точке $x = 0$ функция имеет минимум.

Для функции $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$, график которой изображен на рисунке 4.9, производная $f'(x) = -2\left(3\sqrt[3]{x}\right)$ при $x = 0$ не существует (претерпевает бесконечный разрыв). Несмотря на это, функция при $x = 0$ имеет максимум.

Рассмотренные примеры позволяют дополнить сформулированный необходимый признак существования экстремума следующим образом.

Если непрерывная функция $y=f(x)$ имеет в точке x=c экстремум, то производная функции $f'(x)$ обращается в этой точке в нуль или не существует.

Следует отметить, что условие $f'(c)=0$ (или $f'(c)$не существует), будучи необходимым для существования экстремума, не является достаточным. Например, для функции $f(x)=x^3$ производная $f'(x)=3x^2$ обращается в нуль при $x=0$, однако при $x=0$ функция не имеет экстремума (рис. 4.5).

Значение аргумента $x=c$, при котором производная обращается в нуль или терпит разрыв (в частности, обращается в бесконечность), называется *критическим (критической точкой)*.

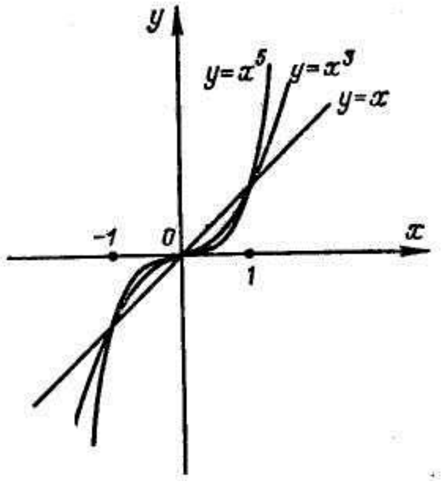


Рис. 4.5

Таким образом, экстремум функции, если он существует, может иметь место только в критических точках. Однако, как мы видели, не во всякой критической точке функция имеет экстремум.

Рассмотрим теперь так называемые д о с т а т о ч н ы е условия существования экстремума, обеспечивающие его наличие в критической точке.

Предварительно условимся для дальнейшего, в тех случаях, когда производная слева от критической точки имеет один знак, а справа от нее – другой знак, говорить, что *производная при переходе через критическую точку меняет знак.*

Т е о р е м а (д о с т а т о ч н ы й п р и з н а к с у щ е с т в о в а н и я э к с т р е м у м а). *Если непрерывная функция $y=f(x)$ имеет производную $f'(x)$ во всех точках некоторого интервала, содержащего критическую точку x=c (за исключением, может быть, самой той точки) и если производная $f'(x)$ при переходе аргумента слева направо через критическую точку x=c меняет знак с плюса на минус, то функция в этой точке имеет максимум, а при перемене знака с минуса на плюс – минимум.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть c – критическая точка и пусть, для определенности, при переходе аргумента через точку c производная меняет знак с плюса на минус, т.е. слева от c производная положительна, а справа от c

– отрицательна. Это значит, что существует достаточно малое число $h>0$ такое, что $f'(x)>0$, если $c-h<x<c$, и $f'(x)<0$, если $c<x<c+h$.

На основании теорем о возрастании и убывании функции заключаем, что $f(x)$ возрастает на сегменте $[c-h,\ c]$ и убывает на сегменте $[c,\ c+h]$.

Следовательно, значение функции в точке c больше, чем ее значения во всех остальных точках сегмента $[c-h,\ c+h]$, а это и означает, что в точке c функция имеет максимум.

Аналогично доказывается теорема и в случае минимума (рис. 4.6).

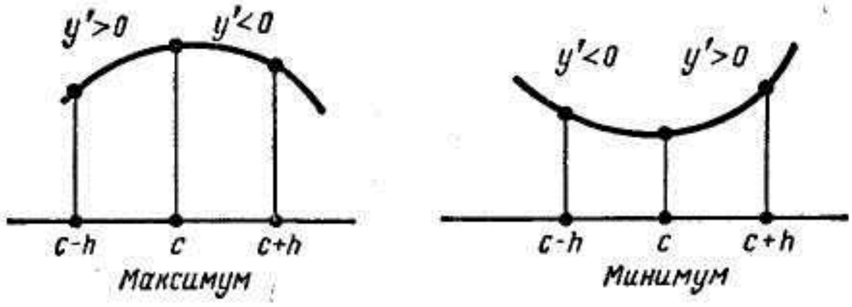


Рис. 4.6

З а м е ч а н и е. Если производная $f'(x)$ не меняет знака при переходе через критическую точку, то функция в этой точке не имеет ни максимума, ни минимума.

Пример 4.2. Исследовать на экстремум функцию $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+1$.

Решение. Эта функция определена и дифференцируема на всей числовой оси.

1. Находим производную: $f'(x)=x^2-4x+3$.

2. Приравниваем производную к нулю и находим корни полученного уравнения (критические точки):

$$x^2-4x+3=0;\ \ x_1=1,\ \ x_2=3.$$

Эти числа разбивают всю область определения данной функции на три интервала: $-\infty<x<1,\ \ 1<x<3,\ \ 3<x<+\infty$.

3. В каждом из этих интервалов производная сохраняет свой знак (так как смена знака может произойти только при переходе через критическую точку). Поэтому при исследовании знака производной в каждом интервале достаточно взять любую точку этого интервала.

В интервале $-\infty<x<1$ берем, например, точку x=0. В этой точке $f'(0)=0^2-4\cdot 0+3=3>0$. Поэтому во всем интервале $-\infty<x<1$ производная положительна.

Аналогично находим, что в интервале $1<x<3$ производная отрицательна, а в интервале $3<x<+\infty$ производная положительна.

Так как при переходе через критическую точку x=1 производная меняет знак с плюса на минус, то в этой точке функция имеет максимум. Вычисляем его:

$$y_{\max} = f(1) = 1/3 - 2 + 3 + 1 = 7/3.$$

При переходе через точку x=3 производная меняет знак с минуса на плюс, а следовательно, в этой точке функция имеет минимум:

$$y_{\min} = f(3) = 1/3 \cdot 27 - 2 \cdot 9 + 3 \cdot 3 + 1 = 1.$$

Полученные результаты запишем в таблицу:

x	$-\infty < x < 1$	1	$1 < x < 3$	3	$3 < x < +\infty$
y'	+	0	-	0	+
y	возрастает	максимум $y_{\max} = 7/3$	убывает	минимум $y_{\min} = 1$	возрастает

График функции изображен на рисунке 4.7.

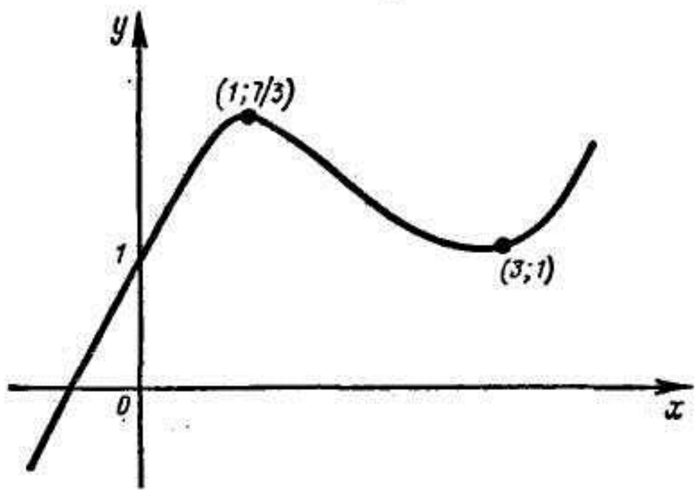


Рис. 4.7

Пример 4.3. Исследовать на экстремум функцию $f(x) = xe^x$.

Решение. Эта функция определена и дифференцируема на всей числовой оси.

1. Находим производную $f'(x) = e^x(x+1)$.

2. Приравниваем производную нулю и находим корни производной:

$$f'(x) = 0, \;\; e^x(x+1) = 0, \;\; x = -1.$$

Это число разбивает всю область определения функции на два интервала: $-\infty < x < -1, \; -1 < x < +\infty$.

3. Исследуем знаки производной в каждом из этих интервалов.

В интервале $-\infty < x < -1$ берем, например, значение $x = -2$, тогда $f'(-2) = e^{-2}(-2+1) = -1/e^2 < 0$.

В интервале $-1 < x < +\infty$ для значения x=0 имеем: $f'(0) = e^0(0+1) = e^0 = 1 > 0$.

Так как при переходе через точку x=-1 производная меняет знак с минуса на плюс, то при x=-1 функция имеет минимум:

$$y_{\min} = f(-1) = -e^{-1} = -1/e \approx -0{,}37.$$

Полученные данные запишем в таблицу:

x	$-\infty < x < -1$	-1	$-1 < x < +\infty$
y'	-	0	+
y	убывает	минимум $y_{\min} = -1/e \approx -0{,}37$	возрастает

График функции $y = xe^x$ изображен на рисунке 4.8.

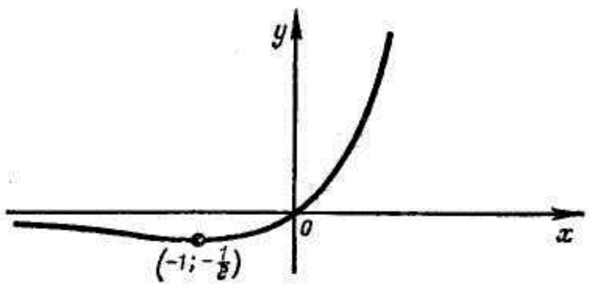


Рис. 4.8

4.3. Достаточный признак существования экстремума

В некоторых случаях при исследовании функции на экстремум оказывается удобным следующий достаточный признак существования экстремума, основанный на знаке второй производной.

Т е о р е м а. *Пусть в точке x=c первая производная функции* $f(x)$ *равна нулю* $[f'(c) = 0]$, *а вторая производная существует и отлична от нуля* $[f''(c) \neq 0]$. *В таком случае, если* $f''(c) < 0$, *то в точке x=c функция имеет максимум; если же* $f''(c) > 0$, *то в точке x=c функция имеет минимум.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть для определенности $f''(c) < 0$. Покажем, что в точке c функция имеет максимум. На основании определения второй производной имеем

$$f''(c) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(c + \Delta x) - f'(c)}{\Delta x}.$$

Так как по условию $f'(c) = 0$, то

$$f''(c) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(c + \Delta x)}{\Delta x}.$$

Учитывая, что $f''(c)<0$, *получаем* $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f'(c+\Delta x)}{\Delta x}<0$. Поскольку предел отрицателен, для малых по абсолютной величине значений Δx выполняется неравенство $\dfrac{f'(c+\Delta x)}{\Delta x}<0$.

Пусть $\Delta x<0$; тогда $f'(c+\Delta x)>0$; если же $\Delta x>0$, то $f'(c+\Delta x)<0$. Это показывает, что при переходе через точку c первая производная меняет свой знак с плюса на минус. Следовательно, на основании достаточного признака существования экстремума, функция $f(x)$ имеет в точке c максимум. Аналогично доказывается, что если $f''(c)>0$, то в точке c функция имеет минимум.

Пример 4.4. Найти экстремумы функции $f(x)=x-2\sin x$ на сегменте $[0,\ 2\pi]$.

Решение. 1. Находим производную $f'(x)=1-2\cos x$.

2. Приравниваем производную нулю и находим корни производной, принадлежащей данному сегменту:

$$1-2\cos x=0,\quad \cos x=1/2,\quad x_1=\pi/3,\quad x_2=5\pi/3.$$

3. Находим вторую производную $f''(x)=2\sin x$ и определяем ее знак в точках $x_1=\pi/3,\ x_2=5\pi/3$. В точке $x_1=\pi/3$ имеем: $f''(\pi/3)=2\sin(\pi/3)=\sqrt{3}>0$. В точке $x_2=5\pi/3$ имеем: $f''(5\pi/3)=2\sin(5\pi/3)=-\sqrt{3}<0$.

Следовательно, в точке $x_1=\pi/3$ функция имеет минимум:

$$y_{\min}=f(\pi/3)=\pi/3-2\sin(\pi/3)=\pi/3-\sqrt{3}\approx -0{,}68,$$

а в точке $x_2=5\pi/3$ - максимум:

$$y_{\max}=5\pi/3-2\sin(5\pi/3)=5\pi/3+\sqrt{3}\approx 6{,}96.$$

В тех случаях, когда в критической точке вторая производная обращается в нуль или не существует, второй достаточный признак существования экстремума неприменим. В этих случаях приходится пользоваться достаточным признаком, основанным на перемене знака первой производной.

Пример 4.5. Найти экстремумы функции $f(x)=x^4$.

Решение. Данная функция определена и дифференцируема на всей числовой оси.

1. Находим производную $f'(x)=4x^3$.

2. Приравниваем производную нулю и находим ее корни:

$$f'(x)=0,\ 4x^3=0,\ x=0.$$

3. Находим вторую производную $f''(x)=12x^2$. В критической точке x=0 вторая производная тоже обращается в нуль. В этом случае рассмотренный достаточный признак неприменим. Применяя первый достаточный признак,

основанный на смене знака первой производной, убеждаемся, что при x=0 функция имеет минимум, так как при переходе через точку x=0 первая производная меняет знак с минуса на плюс (рис. 4.9).

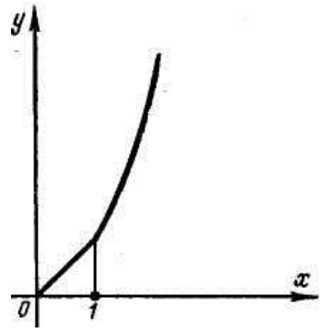


Рис. 4.9

4.4. Отыскание наибольшего и наименьшего значений функции

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, непрерывную на сегменте $[a,\ b]$. Как известно, такая функция достигает своего наибольшего и наименьшего значений либо на границе сегмента, либо внутри него. Если наибольшее (или наименьшее) значение функции достигается во внутренней точке c сегмента, то это значение является максимумом (или минимумом) функции, так как неравенство $M = f(c) \geq f(x)$ (или $m = f(c) \leq f(x)$), имеющее место для всех точек x сегмента $[a,\ b]$, выполняется и для любой окрестности точки c, лежащей внутри сегмента $[a,\ b]$ (см. рис. 4.6).

Таким образом, получаем следующее правило нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на сегменте $[a,\ b]$.

1. Находим все критические точки функции в интервале (a,b) и вычисляем в них значения функции.

2. Вычисляем значение функции на концах сегмента – в точках $x=a$ и $x=b$.

3. Из всех этих значений выбираем наибольшее и наименьшее.

З а м е ч а н и е. Очевидно, если непрерывная на сегменте функция имеет во внутренней точке этого сегмента только один экстремум, то в этой точке она имеет наибольшее значение в случае максимума и наименьшее – в случае минимума.

Пример 4.6. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^3 - 3x$ на сегменте $[-1{,}5;\ 2{,}5]$.

Решение. 1. Находим критические точки функции в интервале $(-1{,}5;\ 2{,}5)$:

$$f'(x) = 3x^2 - 3,\ 3x^2 - 3 = 0,\ x_1 = -1,\ x_2 = 1.$$

Вычисляем значения функции в этих точках:

$$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) = 2,\ f(1) = 1 - 3 = -2.$$

2. Вычисляем значения функции на концах сегмента:

$$f(-1{,}5)=(-1{,}5)^3-3(-1{,}5)=1{,}125;\quad f(2{,}5)=2{,}5^3-3\cdot 2{,}5=8{,}125.$$

Таким образом, наибольшее значение функции $y_{наиб}=8{,}125$ достигается на правом конце сегмента. Наименьшее значение функции $y_{наим}=-2$ достигается в точке x=1.

4.5. Выпуклость и вогнутость графика функции. Точки перегиба

Изучим теперь некоторые свойства графика функции, связанные с понятиями выпуклости и вогнутости.

График дифференцируемой функции $y=f(x)$ называется *выпуклым* в интервале $(a,\ b)$, если он расположен ниже любой своей касательной на этом интервале (рис. 4.10).

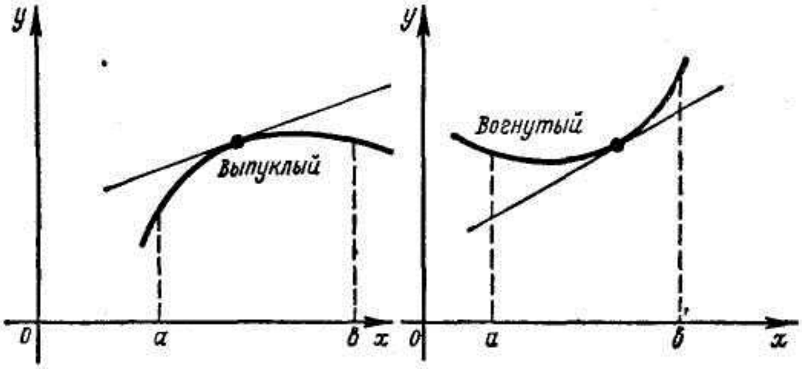


Рис. 4.10

График дифференцируемой функции $y=f(x)$ называется *вогнутым* в интервале $(a,\ b)$, если он расположен выше любой своей касательной на этом интервале (рис. 4.11).

Так, например, полуокружность $y=\sqrt{1-x^2}$ выпукла в интервале $(-1,\ 1)$, парабола $y=x^2$ вогнута в интервале $(-\infty,\ +\infty)$.

График функции в одних интервалах может быть выпуклым, а в других – вогнутым. Например, график функции $y=\sin x$, рассматриваемый в интервале от 0 до 2π, выпуклый в интервале $(0,\ \pi)$ и вогнутый в интервале $(\pi,\ 2\pi)$ (рис. 4.11).

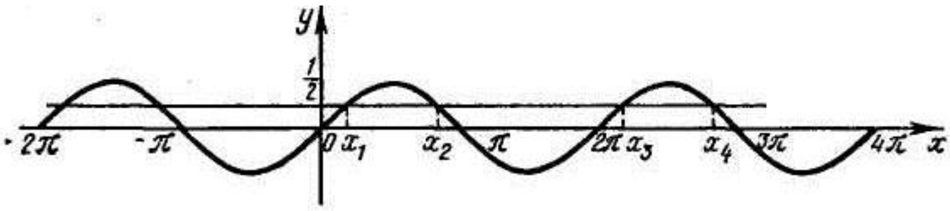


Рис. 4.11

Рассмотрим теперь достаточный признак, позволяющий установить, является ли график функции в данном интервале выпуклым или вогнутым.

Т е о р е м а. *Пусть функция* $y = f(x)$ *имеет вторую производную* $f''(x)$ *во всех точках интервала* (a,b). *Если во всех точках этого интервала* $f''(x) < 0$, *то график функции в этом интервале выпуклый, если же* $f''(x) > 0$ - *вогнутый.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим для определенности, что $f''(x) < 0$, и докажем, что график будет выпуклым. Возьмем на графике функции произвольную точку M_0 с абсциссой x_0, принадлежащей интервалу (a,b), и проведем через точку M_0 касательную (рис. 4.12). Для доказательства теоремы мы должны установить, что график функции в интервале (a,b) расположен ниже этой касательной. Другими словами, мы должны показать, что для одной и той же абсциссы *x* ордината кривой меньше ординаты касательной.

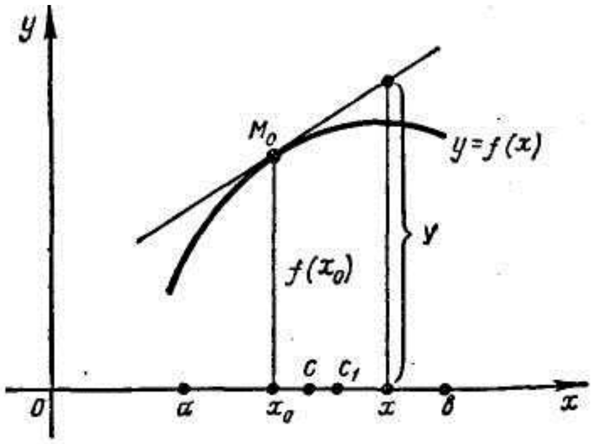


Рис. 4.12

Уравнение графика $y = f(x)$; уравнение касательной в точке M_0 имеет вид

$$Y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Здесь через *Y* обозначена ордината касательной, соответствующая абсциссе *x*.

Разность ординат графика и касательной при одной и той же абсциссе *x* равна

$$y - Y = f(x) - \left[f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \right],$$

или

$$y - Y = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0).$$

Разность $f(x) - f(x_0)$ преобразуем по формуле Лагранжа (4.3):

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0) f'(c),$$

где *c* заключено между x_0 и *x*. Тогда

$$y - Y = f'(c)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = (x - x_0)\left[f'(c) - f'(x_0) \right]. \qquad (4.1)$$

Разность $f'(c)-f'(x_0)$ снова преобразуем по формуле (5.3), применяя ее к производной $f'(x)$:

$$f'(c)-f'(x_0)=(c-x_0)\,f''(c_1),$$

где c_1 заключено между x_0 и c, а следовательно, между x_0 и x. Подставляя выражение для разности в равенство (4.1), получим $y-Y=(x-x_0)(c-x_0)\,f''c_1$. Разности $x-x_0$ и $c-x_0$ имеют одинаковый знак, так как c заключено между x_0 и x; следовательно, их произведение $(x-x_0)(c-x_0)>0$. Так как по условию $f''(x)<0$ в интервале $(a,\,b)$, то, в частности, $f''(c_1)<0$. Поэтому $y-Y=(x-x_0)(c-x_0)\,f''(c_1)<0$. Итак, доказано, что для всех точек интервала $(a,\,b)$ ордината касательной больше ординаты графика, т.е. график выпуклый.

Аналогично доказывается, что при $f''(x)>0$ график вогнутый. Точка графика непрерывной функции, определяющая его выпуклую часть от вогнутой, называется *точкой перегиба.*

Нахождение точек перегиба графика функции основано на следующих теоремах.

Теорема (достаточный признак существования точки перегиба). *Если вторая производная $f''(x)$ непрерывной функции меняет знак при переходе через x_0, то точка с абсциссой $x=x_0$ является точкой перегиба графика функции.*

Доказательство. Пусть, например, $f''(x)<0$ при $x<x_0$ и $f''(x)>0$ при $x>x_0$. В этом случае слева от x_0 график выпуклый, а справа от x_0 - вогнутый. Следовательно, точка x_0 определяет интервал выпуклости от интервала вогнутости, т.е. точка $(x_0;\,f(x_0))$ графика функции является точкой перегиба (рис. 4.13).

Теорема (необходимое условие существования точки перегиба). *Пусть функция $y=f(x)$ имеет в интервале $(a,\,b)$ непрерывную вторую производную $f''(x)$. Тогда, если точка с абсциссой $x_0\in(a,\,b)$ является точкой перегиба графика данной функции, то $f''(x_0)=0$.*

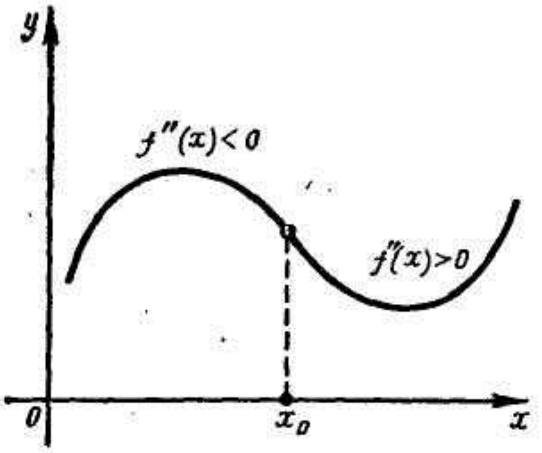


Рис. 4.13

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим противное, т.е. что $f''(x_0) \neq 0$. Пусть для определенности $f''(x_0) > 0$. Тогда в силу предположения о непрерывности второй производной она является положительной в некоторой окрестности точки x_0 и, следовательно, график функции в этой окрестности вогнутый. Но это противоречит тому, что x_0 есть абсцисса точки перегиба. Полученное противоречие показывает, что $f''(x_0) = 0$.

Пусть график функции $y = f(x)$ имеет точку перегиба с абсциссой $x = x_0$. Если при $x = x_0$ вторая производная непрерывна, то $f''(x_0) = 0$. Однако могут встретиться случаи, когда в точке x_0 вторая производная непрерывной функции разрывна (в частности, не существует).

Так, например, для функции $y = \sqrt[3]{x^5}$ вторая производная $y'' = 10 \big/ \left(\sqrt[3]{x}\right)$. Очевидно, что $y'' < 0$ при $-\infty < x < 0$ и $y'' > 0$ при $0 < x < +\infty$. Следовательно, график данной функции имеет точку перегиба при $x = 0$. Однако в этой точке вторая производная не существует.

Таким образом, *абсциссы точек перегиба графика непрерывной функции следует искать среди тех точек, в которых вторая производная или равна нулю, или разрывна (в частности, не существует).*

Пример 4.7. Исследовать на выпуклость и вогнутость график функции $f(x) = x^3 - 3x$.

Решение. Находим вторую производную: $f'(x) = 3x^2 - 3$, $f''(x) = 6x$. Приравниваем $f''(x)$ нулю: $6x = 0$, откуда $x = 0$. Замечая, что если $x < 0$, то $f''(x) = 6x < 0$, а если $x > 0$, то $f''(x) = 6x > 0$, заключаем, что в интервале $(-\infty,\ 0)$ график выпуклый, а в интервале $(0,\ +\infty)$ - вогнутый: при $x = 0$ график функции имеет точку перегиба.

4.6. Асимптоты графика функции

При исследовании функции важно установить форму ее графика при неограниченном удалении точки графика от начала координат или, как говорят, при удалении его переменной точки в бесконечность.

Особый интерес представляет случай, когда график функции при удалении его переменной точки в бесконечность неограниченно приближается к некоторой прямой.

Асимптотой графика функции $y = f(x)$ называется прямая линия, обладающая тем свойством, что расстояние от переменной точки на графике до прямой стремится к нулю при неограниченном удалении этой точки по графику от начала координат.

Рассмотрим отдельно случай асимптот, параллельных оси *Oy* и не параллельных оси *Oy*.

Асимптоты, параллельные оси *Oy*. Путь при $x \to x_0 - 0$ функция $y = f(x)$ неограниченно возрастает по абсолютной величине, т.е. $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \infty$. Тогда из определения следует, что прямая $x = x_0$ есть асимптота (рис. 4.14).

Аналогично, прямая $x = x_0$ является асимптотой, если $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = \infty$. Очевидно и обратное: если прямая $x = x_0$ асимптота, хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ или $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ бесконечен.

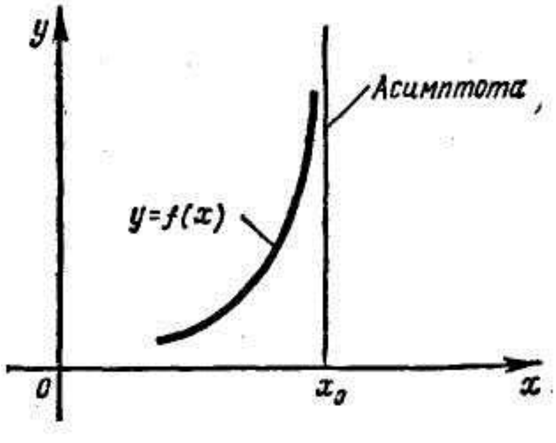


Рис. 4.14

Таким образом, для отыскания асимптот графика функции $y = f(x)$, параллельных оси *Oy*, надо найти те значения $x = x_0$, при которых функция обращается в бесконечность (терпит бесконечный разрыв). Тогда асимптота, параллельная оси *Oy*, имеет уравнение $x = x_0$.

Пример 4.8. Найти асимптоту графика функции $f(x) = x + \dfrac{1}{x-2}$, параллельную оси *Oy*.

Решение. Так как $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2}\left(x + \dfrac{1}{x-2}\right) = \infty$, то прямая $x = 2$ есть асимптота.

Пример 4.9. Найти асимптоты графика функции $f(x) = tgx$, параллельные оси *Oy*.

Решение. Так как $\lim\limits_{x\to\pi(2m+1)/2} tgx = \infty$, то график этой функции имеет бесчисленное множество асимптот: $x = \pi/2$, $x = 3\pi/2$, $x = 5\pi/2$, …, $x = -\pi/2$. $x = -3\pi/2$, $x = -5\pi/2$, …. (рис. 4.15).

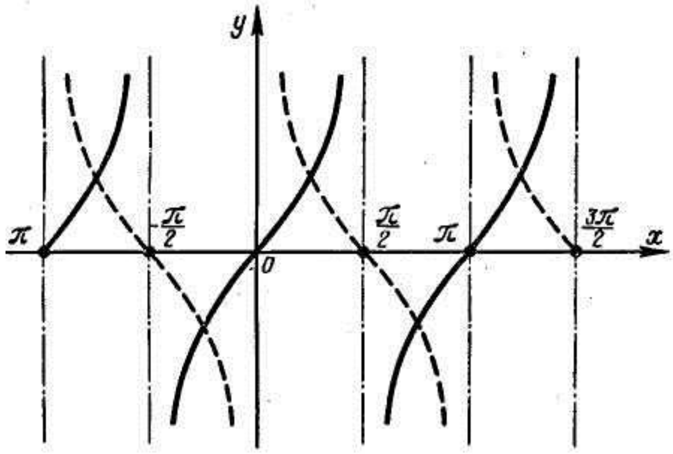


Рис. 4.15

А с и м п т о т ы, не п а р а л л е л ь н ы е о с и *Oy*. Пусть график функции $y = f(x)$ имеет асимптоту, не параллельную оси *Oy*. Тогда уравнение такой асимптоты имеет вид $y = kx + b$. Для определения k и b поступим следующим образом. Опустим из точки *M* графика функции на асимптоту перпендикуляр *MN* (рис. 4.16).

Из определения асимптоты следует, что при $x \to +\infty$ длина $MN \to 0$: $\lim\limits_{x\to+\infty} MN = 0$. Из треугольника M_1MN имеем: $M_1M = MN/\cos\alpha$, где α - угол наклона асимптоты к оси *Ox*. Поскольку α постоянно, величина M_1M стремится к нулю одновременно с MN, т.е. $\lim\limits_{x\to+\infty} M_1M = 0$.

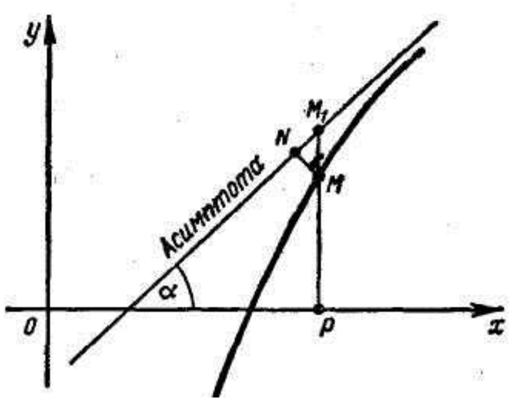


Рис. 4.16

Так как

$$M_1M = PM_1 - PM = y_{асимпт} - y_{графика} = (kx+b) - f(x), \text{ то}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[(kx+b) - f(x)\right] = 0. \qquad (4.2)$$

Из (4.2) следует, что разность, стоящая в квадратных скобках, есть бесконечно малая функция при $x\to+\infty$: $f(x)-(kx+b)=\beta(x)$. Разделим последнее равенство почленно на x и перейдем к пределу:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x}\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{\beta(x)}{x}.$$

Так как $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{b}{x}=0$ и $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\beta(x)}{x}=0$, то имеем $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{f(x)}{x}-k\right]=0$. Отсюда угловой коэффициент асимптоты

$$k = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}. \qquad (4.3)$$

Определим теперь b. Так как $f(x)-kx-b=\beta(x)$, то $b=f(x)-kx-\beta(x)$. Переходя к пределу при $x\to+\infty$, получим

$$b = \lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-kx\right]. \qquad (4.4)$$

Здесь k находится по формуле (4.3).

Таким образом, для нахождения асимптоты, не параллельной оси Oy, надо найти пределы (4.3) и (4.4). Можно показать, что и обратно, если пределы (4.3) и (4.4) существуют, то прямая $y=kx+b$ есть асимптота.

Если хотя бы один из этих пределов не существует, то график функции $y=f(x)$ асимптоты при $x\to+\infty$ не имеет.

В частном случае коэффициент k в уравнении асимптоты может равняться нулю. В этом случае асимптота параллельна оси Ox и называется *горизонтальной.*

Аналогично находятся асимптоты при $x\to-\infty$. Заметим, что пределы вида (4.3) и (4.4) могут быть различными при $x\to+\infty$ и $x\to-\infty$, т.е. график функции может иметь две различные асимптоты, не параллельные оси Oy, при $x\to+\infty$ и $x\to-\infty$.

Пример 4.10. Найти асимптоты графика функции $y = x - 2arctgx$.

Решение. Данная функция определена и непрерывна на всей числовой оси. Следовательно, асимптот, параллельных оси Oy, график не имеет.

Находим асимптоты, не параллельные оси Oy.

$$1)\ x\to+\infty;\ k=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-2arctgx}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{2arctgx}{x}\right)=$$

$$=1-2\lim_{x\to+\infty}\frac{arctgx}{x}=1,$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(x-2arctgx-x\right)=-2\lim_{x\to+\infty}arctgx=-2\cdot\pi/2=-\pi.$$

Итак, при $x\to+\infty$ уравнение асимптоты $y=x-\pi$.

2) $x \to -\infty$; $k = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x - 2arctgx}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 - \dfrac{2arctgx}{x}\right) = 1$,

$b = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(x - 2arctgx - x\right) = -2 \lim\limits_{x \to -\infty} \left(arctgx\right) = -2\left(-\pi/2\right) = \pi$.

При $x \to -\infty$ уравнение асимптоты $y = x + \pi$.

Таким образом, график функции $y = x - 2arctgx$ имеет две различные асимптоты, не параллельные оси *Oy*: $y = x - \pi$ при $x \to +\infty$; $y = x + \pi$ при $x \to -\infty$. График функции $y = x - 2arctgx$ показан на рисунке 4.17.

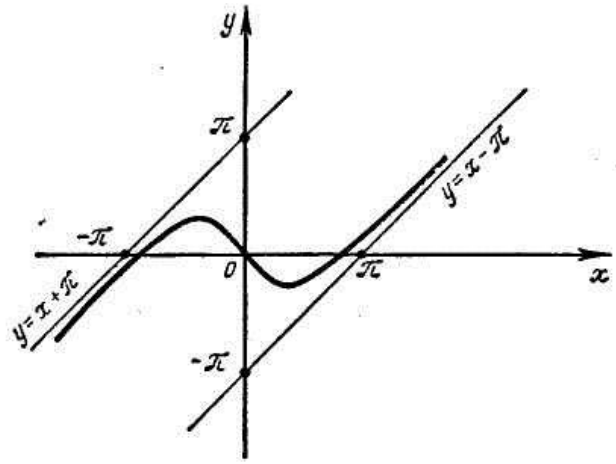


Рис. 4.17

4.7. Общая схема исследования функции и построение ее графика

На основании вышеизложенного можно рекомендовать следующий план исследования функций.

1. Нахождение области определения функции, интервалов непрерывности и точек разрыва.
2. Нахождение асимптот графика функции.
3. Нахождение интервалов монотонности функции и ее экстремумов (максимумов и минимумов).
4. Нахождение интервалов выпуклости и вогнутости и точек перегиба графика функции.
5. Построение графика функции.

З а м е ч а н и е 1. При построении графика функции полезно знать также точки пересечения графика с осями координат.

З а м е ч а н и е 2 . Перед построением графика полезно также установить, не является ли данная функция четной или нечетной. При построении графика четной или нечетной функции рекомендуется использовать симметрию графика относительно оси ординат или начала координат.

Пример 4.11. Исследовать функцию $f\left(x\right) = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$ и построить ее график.

Решение. 1. Функция определена и непрерывна для всех значений *x*.

2. Находим асимптоты графика функции, не параллельные оси *Oy:*

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-3\sqrt[3]{x^2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(2-3\sqrt[3]{\frac{1}{x}}\right)=2,$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-kx\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[2x-3\sqrt[3]{x^2}-2x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(-3\sqrt[3]{x^2}\right)=-\infty.$$

Так как для b не существует конечного предела, то график функции асимптот, не параллельных оси *Oy*, при $x\to+\infty$ не имеет. Легко проверить, что и при $x\to-\infty$ график функции также не имеет асимптот, не параллельных оси *Oy*. Асимптот, параллельных оси *Oy*, также нет, так как функция $2x-3\sqrt[3]{x^2}$ непрерывна при всех значениях *x*.

3. Определяем интервалы монотонности функции, максимумы и минимумы.

Находим производную $f'(x)=2-\frac{2}{\sqrt[3]{x}}$. Определим критические значения аргумента:

$2-\frac{2}{\sqrt[3]{x}}=0$, или $\frac{2\left(\sqrt[3]{x}-1\right)}{\sqrt[3]{x}}=0$, $\sqrt[3]{x}-1=0$, $x=1$.

Кроме того, так как при $x=0$ производная терпит бесконечный разрыв, то значение $x=0$ также является критическим.

Определяем знаки производной в каждом из интервалов $(-\infty,\ 0)$, $(0,\ 1)$, $(1,\ +\infty)$, на которые точки 0 и 1 разбивают всю область определения данной функции. Имеем:

$(-\infty,\ 0)$: $f'(-1)>0$; $(0,\ 1)$: $f'(1/8)<0$; $(1,\ +\infty)$: $f'(8)>0$.

Составляем таблицу

x	$-\infty<x<0$	0	$0<x<1$	1	$1<x<+\infty$
y'	+	не сущ.	-	0	+
y	возрастает	максимум $y_{\max}=0$	убывает	минимум $y_{\min}=-1$	возрастает

Таким образом,

$$y_{\max}=f(0)=0,\quad y_{\min}=f(1)=-1.$$

4. Определяем интервалы выпуклости и вогнутости и точки перегиба графика.

Находим вторую производную

$$f''(x)=-2\left(-\frac{1}{3}\right)x^{-4/3}=\frac{2}{3x\sqrt[3]{x}};$$

$f''(x)$ не обращается в нуль ни при каком значении *x*, но при $x=0$ не существует (имеет бесконечный разрыв).

Определяем знаки второй производной в каждом из интервалов $(-\infty,\ 0)$ и $(0,\ +\infty)$ и составляем таблицу

x	$-\infty < x < 0$	0	$0 < x < +\infty$
y''	+	не существует	+
график	вогнут	перегиба нет	вогнут

Находим точки пересечения графика с осями координат:

$$f(x) = 0,\ 2x - 3\sqrt[3]{x^2} = 0,\ 8x^3 - 27x^2 = 0,\ x_1 = x_2 = 0,\ x_3 = 27/8.$$

При построении графика необходимо иметь в виду, что $f'(x) \to \infty$, при $x \to 0$, т.е. в начале координат график имеет вертикальную касательную (рис. 4.18).

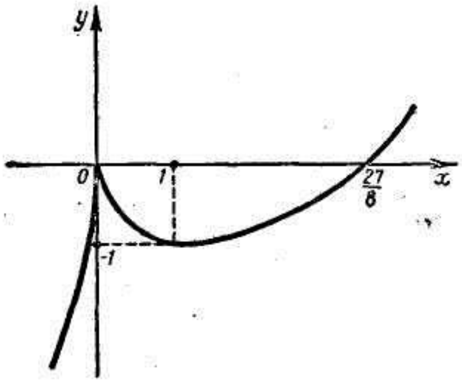


Рис. 4.18

5. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

5.1. Функция двух переменных и ее область определения

Итак, *функцией двух переменных называется правило, по которому каждой паре чисел* $(x;\ y) \in M$ *соответствует единственное число* $z \in L$ при условии, что каждое число $z \in L$ соответствует хотя бы одной паре $(x;\ y) \in M$, где под множеством M понимается некоторое множество пар $(x;\ y)$ действительных чисел, а под множеством L – некоторое множество действительных чисел.

При этом x и y называются *независимыми переменными* (или *аргументами*), z – *зависимой переменной,* множество M – *областью определения* функции, а L – *множеством значений* функции. Как и в случае одной переменной, зависимую переменную также называют функцией (как и само правило соответствия).

Обозначения функции двух переменных аналогичны обозначениям функции одной переменной: $z = f(x,\ y)$, $z = \varphi(x,\ y)$, $z = z(x,\ y)$ и т.д.

Пример 5.1. Найти область определения функции $z = \ln\left(1 - x^2 - y^2\right)$.

Решение. Функция задана только с помощью формулы. Областью определения этой функции является множество всех тех точек, для которых выражение $\ln\left(1 - x^2 - y^2\right)$ определено, т.е. множество точек, для которых $1 - x^2 - y^2 > 0$, или $x^2 + y^2 < 1$. Так как выражение $x^2 + y^2$ представляет собой квадрат расстояния точки $P(x;\ y)$ от начала координат, то в область определения данной функции войдут только те точки, расстояние которых от начала координат меньше единицы. Множество всех таких точек образует внутренность круга с центром в начале координат и радиусом, равным единице (рис. 5.1).

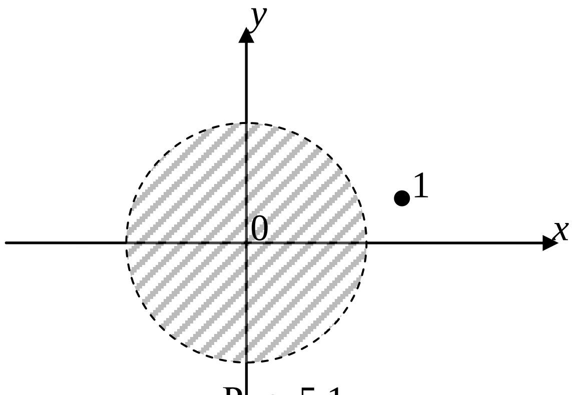


Рис. 5.1

6. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ

6.1. Частные производные первого порядка

Рассмотрим функцию двух переменных $z = f(x,\, y)$. Зафиксируем значение одного из ее аргументов, например *y*, положив $y = y_0$. Тогда функция $f(x,\, y_0)$ есть функция одной переменной *x*. Пусть она имеет производную в точке x_0:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x,\, y_0) - f(x_0,\, y_0)}{\Delta x}. \tag{6.1}$$

Эта производная называется *частной производной первого порядка* функции $z = f(x,\, y)$ по *x* в точке $P_0(x_0;\, y_0)$ и обозначается символом $f'_x(x_0,\, y_0)$.

Разность $f(x_0 + \Delta x,\, y_0) - f(x_0,\, y_0)$ называется *частным приращением по x* функции $z = f(x,\, y)$ в точке $P_0(x_0;\, y_0)$ и обозначается символом $\Delta_x z$:

$$\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x,\, y_0) - f(x_0,\, y_0). \tag{6.2}$$

Учитывая эти обозначения, можно записать

$$f'_x(x_0,\, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}. \tag{6.3}$$

Аналогично определяются и обозначаются частное приращение функции $z = f(x,\, y)$ по *y* и частная производная по *y* в точке $P_0(x_0;\, y_0)$:

$$\Delta_y z = f(x_0,\, y_0 + \Delta y) - f(x_0,\, y_0) \tag{6.2’}$$

$$f'_y(x_0,\, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}. \tag{6.3’}$$

Таким образом, *частная производная функции двух переменных по одному из ее аргументов равна пределу отношения частного приращения* *функции к вызвавшему его приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.*

Значение частной производной зависит от точки $P(x;\, y)$, в которой она вычисляется. Поэтому частная производная функции двух переменных $z = f(x,\, y)$, вообще говоря, есть функция точки $P(x;\, y)$, т.е. также является функцией двух переменных x и y.

Частные производные, рассматриваемые как функции двух переменных, обозначаются следующим образом*:

$$f'_x(x,\, y),\; f'_y(x,\, y), \text{ или } z'_x,\; z'_y, \text{ или } \frac{\partial z}{\partial x},\; \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Частные приращения и частные производные функции n переменных при $n > 2$ определяются и обозначаются аналогично. Например, для функции трех переменных $u = f(x,\, y,\, z)$ частное приращение по x в точке $P_0(x_0;\, y_0;\, z_0)$ получится, если x получит приращение Δx, а остальные аргументы останутся неизменными:

$$\Delta_x u = f(x_0 + \Delta x,\, y_0,\, z_0) - f(x_0,\, y_0,\, z_0).$$

Частная производная функции $u = f(x,\, y,\, z)$ по аргументу x в точке $P_0(x_0;\, y_0;\, z_0)$ равна

$$u'_x(x_0,\, y_0,\, z_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x}.$$

Таким образом, частная производная функции нескольких переменных определяется как производная функции одной из этих переменных. Вследствие этого все правила и формулы дифференцирования, выведенные для производных функции одной переменной, сохраняются для частных производных функции нескольких переменных. Следует лишь помнить, что во всех этих правилах и формулах при нахождении частной производной по какому-либо аргументу все остальные аргументы считаются постоянными.

Пример 6.1. Найти частные производные функции $z = f(x,\, y) = x^2 y - 3y^2 + 5x$.

Решение. Частную производную $f'_x(x,\, y)$ находим как производную функции $f(x,\, y)$ по аргументу x в предположении, что $y = const$. Поэтому

$$f'_x(x,\, y) = \left(x^2 y - 3y^2 + 5x\right)'_x = 2xy - 0 + 5 = 2xy + 5.$$

Аналогично

$$f'_y(x,\, y) = \left(x^2 y - 3y^2 + 5x\right)'_y = x^2 - 6y + 0 = x^2 - 6y.$$

Пример 6.2. $f(x,\, y) = x + y - \sqrt{x^2 + y^2}$. Найти $f'_x(3,\, 4)$.

---

* Заметим, что в отличие от производной функции одной переменной выражения $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ нельзя рассматривать как дроби. Эти выражения являются символами, обозначающими частные производные.

Решение. Находим сначала частную производную функции $f(x, y)$ по x:

$$f'_x(x, y) = \left(x + y - \sqrt{x^2 + y^2}\right)'_x = (x + y)'_x - \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)'_x =$$

$$= 1 + 0 - \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \left(x^2 + y^2\right)'_x = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot 2x = 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Теперь вычислим частное значение найденной частной производной при $x = 3$ $y = 4$:

$$f'_x(3,\ 4) = \left[1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right]_{\substack{x=3 \\ y=4}} = 1 - \frac{3}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{2}{5}.$$

6.2. Частные производные высших порядков

Частные производные функции нескольких переменных являются функциями тех же переменных. Эти функции, в свою очередь, могут иметь частные производные, которые называются *вторыми частными производными* (или *частными производными второго порядка*) исходной функции.

Так, например, функция $z = f(x, y)$ двух переменных имеет четыре частных производные второго порядка, которые определяются и обозначаются следующим образом:

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{x^2}(x, y); \quad \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x, y);$$

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x, y); \quad \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{y^2}(x, y).$$

Функция $u = f(x, y, z)$ трех переменных имеет девять частных производных второго порядка:

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''_{x^2}(x, y, z); \quad \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x, y, z);$$

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = f''_{xz}(x, y, z)$$

и т.д.

Аналогично определяются и обозначаются частные производные третьего и более высокого порядка функции нескольких переменных: *частной производной* n*-го порядка функции нескольких переменных называется частная производная первого порядка от частной производной (*n*-1)-го порядка той же функции.*

Например, частная производная третьего порядка $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$ функции $z = f(x, y)$ есть частная производная первого порядка по y от частной производной второго порядка $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)}{\partial y}.$$

Частная производная второго или более высокого порядка, взятая по нескольким различным переменным, называется *смешанной частной производной.*

Например, частные производные

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y},\ \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x},\ \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2},\ \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x}$$

являются смешанными частными производными функции двух переменных $z = f(x, y)$.

Пример 6.3. Найти смешанные частные производные второго порядка функции $z = x^2 y^3$.

Решение. Находим частные производные первого порядка

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^3,\ \frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2 y^2.$$

Затем находим смешанные частные производные второго порядка

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial y} = \left(2xy^3\right)'_y = 6xy^2,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial x} = \left(3x^2 y^2\right)'_x = 6xy^2.$$

Мы видим, что смешанные частные производные данной функции $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, отличающиеся между собой лишь порядком дифференцирования, т.е. последовательностью, которой производится дифференцирование по различным переменным, оказались тождественно равными. Этот результат не случаен. Относительно смешанных частных производных имеет место следующая теорема, которую мы принимаем без доказательства.

Т е о р е м а. *Две смешанные частные производные одной и той же функции, отличающиеся лишь порядком дифференцирования, равны между собой при условии их непрерывности.*

В частности, для функции двух переменных $z = f(x, y)$ имеем:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

7. ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

7.1. Необходимые и достаточные условия существования экстремума

Понятия максимума и минимума для функции нескольких переменных вводятся так же, как и для функции одной переменной. Мы рассмотрим эти понятия только в применении к функции двух переменных.

Пусть функция двух переменных $z = f(x, y)$ задана в некоторой области G. Введем следующие определения.

Функция двух переменных $z = f(x, y) = f(P)$ *имеет в точке* $P_0(x_0; y_0)$ *области G максимум, если существует такая окрестность этой точки, что для всех точек* $P(x, y)$ *этой окрестности, отличных от* P_0, *выполняется неравенство* $f(P_0) > f(P)$.

Функция двух переменных $z = f(x, y) = f(P)$ *имеет в точке* $P_0(x_0; y_0)$ *области G минимум, если существует такая окрестность этой точки, что для всех точек* $P(x, y)$ *этой окрестности, отличных от* P_0, *выполняется неравенство* $f(P_0) < f(P)$. Точка P_0, в которой функция $z = f(P)$ имеет максимум (или минимум), называется *точкой максимума* (или *точкой минимума*).

Как и в случае функции одной переменной, точку максимума (или минимума) не следует смешивать с точкой, в которой функция принимает наибольшее (или наименьшее) значение в области G.

Существует общее название для максимума и минимума – *экстремум.*

Т е о р е м а (необходимый признак существования экстремума). *Если* $P_0(x_0; y_0)$ *есть точка экстремума функции* $z = f(x, y)$, *то*

$$f_x'(x_0, y_0) = 0, \qquad f_y'(x_0, y_0) = 0$$

в предположении, что указанные частные производные существуют в точке $P_0(x_0; y_0)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Частная производная функции $z = f(x, y)$ по x в точке $P_0(x_0; y_0)$ есть производная функции одной переменной $\varphi(x) = f(x, y)$ в точке $x = x_0$. Но в этой точке функция $\varphi(x)$ имеет, очевидно, экстремум. Следовательно, $\varphi'(x_0) = 0$. Так как $\varphi'(x_0) = f_X'(x_0, y_0)$, то $f_X'(x_0, y_0) = 0$. Аналогично можно показать, что $f_y'(x_0, y_0) = 0$. Теорема доказана.

Таким образом, обращение в нуль в точке P_0 частных производных первого порядка функции $z = f(x, y)$ (если они существуют) является необходимым условием существования в точке P_0 экстремума этой функции.

Заметим, что функция может иметь экстремум также в тех точках, где хотя бы одна из частных производных не существует. Например, функция $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, очевидно, имеет минимум в точке $O(0;0)$, но в этой точке частные производные не существуют.

Точки, в которых первые частные производные $f_x'(x, y)$ и $f_y'(x, y)$ функции $z = f(x, y)$ обращаются в нуль или не существуют, называются *критическими точками* этой функции.

Из изложенного выше следует, что точки экстремума функции следует искать среди ее критических точек. Однако существуют критические точки, не являющиеся точками экстремума.

Рассмотрим, например, функцию $z = f(x, y) = xy$. Первые частные производные этой функции $\frac{\partial z}{\partial x} = y$ и $\frac{\partial z}{\partial y} = x$ обращаются в нуль в точке $P_0(0;0)$; следовательно, эта точка является критической. Однако экстремума в ней функция $z = xy$ не имеет.

В самом деле, $z(P_0) = 0$, но в любой окрестности точки $P_0(0;\ 0)$ имеются как положительные (в точках, принадлежащих I и III четвертям), так и отрицательные (в точках, принадлежащих II и IV четвертям) значения функции z.

Рассмотренный пример показывает, что необходимый признак существования экстремума не является достаточным признаком.

Достаточным условием наличия экстремума в критической точке $P_0(x_0;\ y_0)$ является условие

$$\Delta(P_0) = f''_{x^2}(P_0) \cdot f''_{y^2}(P_0) - \left[f''_{xy}(P_0) \right]^2 > 0,$$

причем в случае $f''_{x^2}(P_0) < 0$ точка P_0 есть точка максимума, а в случае $f''_{x^2}(P_0) > 0$ - точка минимума. Условие

$$\Delta(P_0) = f''_{x^2}(P_0) \cdot f''_{y^2}(P_0) - \left[f''_{xy}(P_0) \right]^2 < 0$$

является достаточным условием отсутствия экстремума в критической точке P_0.

В случае $\Delta(P_0) = 0$ точка P_0 может быть, а может и не быть точкой экстремума (сомнительный случай). В этом случае необходимы дополнительные исследования.

Сформулированные здесь достаточные признаки существования или отсутствия экстремума мы оставляем без доказательства.

Пример 7.1. Найти экстремумы функции $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 30x - 18y$.

Решение. Находим первые частные производные: $f'_x(x, y) = 3x^2 + 3y^2 - 30$, $f'_y(x, y) = 6xy - 18$. Приравнивая эти производные нулю, после элементарных преобразований приходим к системе уравнений

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 10, \\ 2xy &= 6. \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

Складывая и вычитая почленно уравнения (*), получим:

$$\left.\begin{aligned} x^2 + 2xy + y^2 &= 16, \\ x^2 - 2xy + y^2 &= 4. \end{aligned}\right\} \quad \text{или} \quad \left.\begin{aligned} x + y &= \pm 4, \\ x - y &= \pm 2. \end{aligned}\right\}$$

Решая эту систему уравнений (равносильную данной), находим четыре критические точки: $P_1(3;\ 1)$, $P_2(1;\ 3)$, $P_3(-1;\ -3)$ и $P_4(-3,\ -1)$.

Теперь найдем вторые частные производные: $f''_{x^2} = 6x$; $f''_{xy} = 6y$; $f''_{y^2} = 6x$ и составим выражение

$$\Delta(P) = f''_{x^2}(P) \cdot f''_{y^2}(P) - \left[f''_{xy}(P) \right]^2 = 36\left(x^2 - y^2\right).$$

Убеждаемся, что:

1) $\Delta(P_1) > 0$, $f''_{x^2}(P_1) > 0$, P_1 - точка минимума;

2) $\Delta(P_2) < 0$, в точке P_2 экстремума нет;

3) $\Delta(P_3) < 0$, в точке P_3 экстремума нет;

4) $\Delta(P_4) > 0$, $f''_{x^2}(P_4) < 0$, P_4 - точка максимума.

Итак, данная функция имеет два экстремума: в точке P_1 - минимум $f(P_1) = -72$, в точке P_4 - максимум $f(P_4) = 72$.

7.2. Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа

Рассмотрим задачу, специфическую для функций нескольким переменных, когда ее экстремум ищется не на всей области определения, а на множестве, удовлетворяющем некоторому условию.

Пусть рассматривается функция $z = f(x, y)$, аргументы x и y которой удовлетворяют условию $g(x, y) = C$, называемому *уравнением связи.*

Определение. *Точка* $(x_o,\ y_o)$ *называется точкой* ***условного максимума (минимума),*** *если существует такая окрестность этой точки, что для всех точек* $(x,\ y)$ *из этой окрестности, удовлетворяющих условию* $g(x, y) = C$, *выполняется неравенство*

$$f(x_0, y_0) \geq f(x, y) \left(f(x_0, y_0) \leq f(x, y) \right).$$

На рис. 7.1 изображена точка условного максимума (x_0, y_0). Очевидно, что она не является точкой безусловного экстремума функции $z = f(x, y)$ (на рисунке 7.1 это точка (x_1, y_1)).

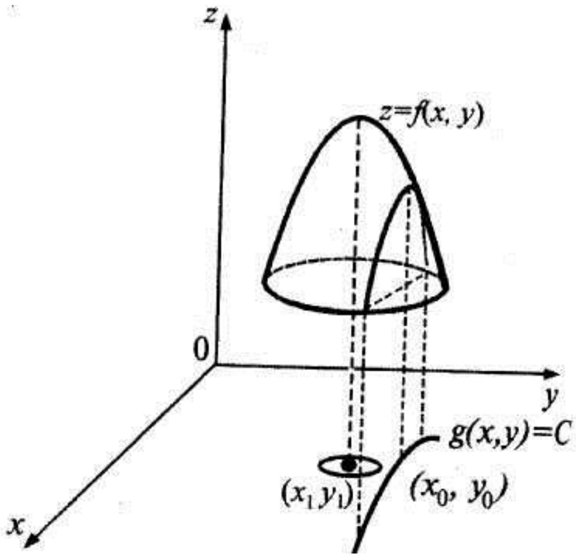


Рис. 7.1

Наиболее простым способом нахождения условного экстремума функции двух переменных является сведение задачи к отысканию экстремума функции одной переменной. Допустим, уравнение связи $g(x, y)=C$ удалось разрешить относительно одной из переменных, например, выразить *y* через *x*: $y=\varphi(x)$. Подставив полученное выражение в функцию двух переменных, получим $z=f(x, y)=f(x, \varphi(x))$, т.е. функцию о д н о й переменной. Ее экстремум и будет условным экстремумом функции $z=f(x, y)$.

Пример 7.2. Найти точки максимума и минимума функции $z=x^2+2y^2$ при условии $3x+2y=11$.

Решение. Выразим из уравнения $3x+2y=11$ переменную *y* через переменную *x* и подставим полученное выражение $y=\frac{11-3x}{2}$ в функцию *z*. Получим $z=x^2+2\left(\frac{11-3x}{2}\right)^2$ или $z=\frac{11}{2}\left(x^2-6x+11\right)$. Эта функция имеет единственный минимум при $x_0=3$. Соответствующее значение функции $y_0=\frac{11-3x_0}{2}=1$. Таким образом, (3; 1) — точка условного экстремума (минимума).

В рассмотренном примере уравнение связи $g(x, y)=C$ оказалось линейным, поэтому его легко удалось разрешить относительно одной из переменных. Однако в более сложных случаях сделать это не удается.

Для отыскания условного экстремума в общем случае используется *метод множителей Лагранжа.*

Рассмотрим функцию трех переменных $L(x, y, \lambda)=f(x, y)+\lambda\left(g(x, y)-C\right)$.

Эта функция называется *функцией Лагранжа,* а λ — *множителем Лагранжа.* Верна следующая теорема.

Т е о р е м а. *Если точка* (x_0, y_0) *является точкой условного экстремума функции* $z = f(x, y)$ *при условии* $g(x, y) = C$*, то существует значение* λ_0 *такое, что точка* (x_0, y_0, λ_0) *является точкой экстремума функции* $L(x, y, \lambda)$.

Таким образом, для нахождения условного экстремума функции $z = f(x, y)$ при условии $g(x, y) = C$ требуется найти решение системы

$$\begin{cases} L_x' = f_x'(x, y) + \lambda g_x'(x, y) = 0, \\ L_y' = f_y'(x, y) + \lambda g_y'(x, y) = 0, \\ L_\lambda' = g(x, y) - C = 0. \end{cases}$$

Последнее из этих уравнений совпадает с уравнением связи. Первые два уравнения системы можно переписать в виде

$$\mathrm{grad} f = -\lambda \mathrm{grad} g,$$

т.е. в *точке условного экстремума градиенты функций* $f(x, y)$ *и* $g(x, y)$ *коллинеарны.*

На рис. 7.2 показан геометрический смысл условий Лагранжа. Линия $g(x, y) = C$ пунктирная, линии уровня $g(x, y) = Q$ функции $z = f(x, y)$ сплошные.

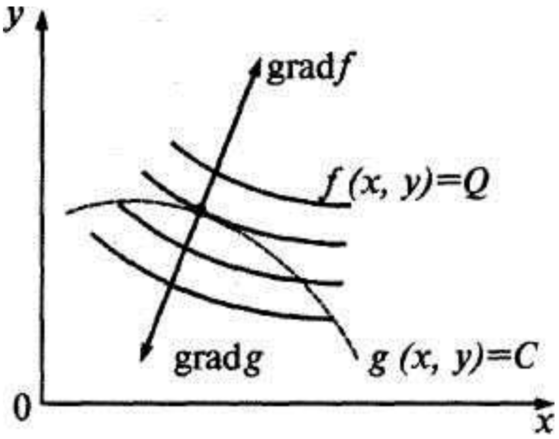


Рис. 7.2

Из рис. 7.2 следует, что *в точке условного экстремума линия уровня функции* $z = f(x, y)$ *касается линии* $g(x, y) = C$.

Пример 7.3. Найти точки экстремума функции $z = x^2 + 2y^2$ при условии $3x + 2y = 11$, используя метод множителей Лагранжа.

Решение. Составляем функцию Лагранжа $L = x^2 + 2y^2 + \lambda(3x + 2y - 11)$. Приравнивая к нулю ее частные производные, получим систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + 3\lambda = 0, \\ 4y + 2\lambda = 0, \\ 3x + 2y - 11 = 0. \end{cases}$$

Ее единственное решение ($x = 3$, $y = 1$, $\lambda = —2$). Таким образом, точкой условного экстремума может быть только точка (3; 1). Нетрудно убедиться в том, что в этой точке функция $z = f(x, y)$ имеет условный минимум.

В случае, если число переменных более двух, может рассматриваться и несколько уравнений связи. Соответственно, в этом случае будет и несколько множителей Лагранжа.

Мы не рассматриваем здесь достаточные условия условного экстремума. Отметим только, что во многих задачах критическая точка функции Лагранжа оказывается единственной и соответствует не только локальному, но и глобальному условному минимуму или максимуму.

Задача нахождения условного экстремума используется при решении таких экономических задач, как нахождение оптимального распределения ресурсов, выбор оптимального портфеля ценных бумаг и др.

7.3. Функции нескольких переменных в экономической теории

Рассмотрим некоторые приложения функций нескольких переменных в экономической теории.

Значительная часть экономических механизмов иллюстрируется на рисунках, изображающих линии уровня функции двух переменных $z = f(x, y)$. Например, линии уровня производственной функции называются *изоквантами.*

Пусть x и y — два различных фактора производства, а функция $z = f(x, y)$ характеризует выпуск продукции, который позволяют значения факторов x и y. На рисунке 7.3 линии уровня $f(x, y) = Q$ изображены сплошными линиями, а штриховкой выделена так называемая *экономическая область,* которая характеризуется тем, что высекаемые ею части изоквант представляют собой графики убывающих функции, т.е увеличение количества одного фактора позволяет уменьшить количество другого, не меняя размера выпуска.

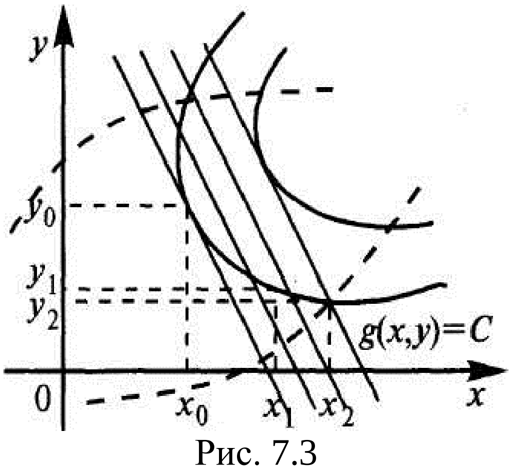


Рис. 7.3

Иными словами, *экономическая область — это множество значений факторов, допускающих замещение одного из них другим.* Очевидно, что все «разумные» значения *x и y* принадлежат экономической области.

Изокванты позволяют геометрически иллюстрировать решение **задачи об оптимальном распределении ресурсов.** Пусть $z = g(x, y)$ — функция издержек, характеризующая затраты, необходимые для обеспечения значений ресурсов x и y (часто можно .считать, что функция издержек линейная: $g(x, y) = p_x x + p_y y$, где p_x и p_y — «цены» факторов x и y). Линии уровня этой функции также изображены на рис. 7.4. Комбинации линий уровня функции $f(x)$ и $g(x)$ позволяют делать выводы о предпочтительности того или иного значения факторов x и y. Очевидно, например, что пара значений (x_1, y_1) более предпочтительна, чем пара (x_2, y_2), так как обеспечивает тот же выпуск, но с меньшими затратами. Оптимальными же значениями факторов будут значения (x_0, y_0) — координаты точки касания линии уровня функции выпуска и функции издержек.

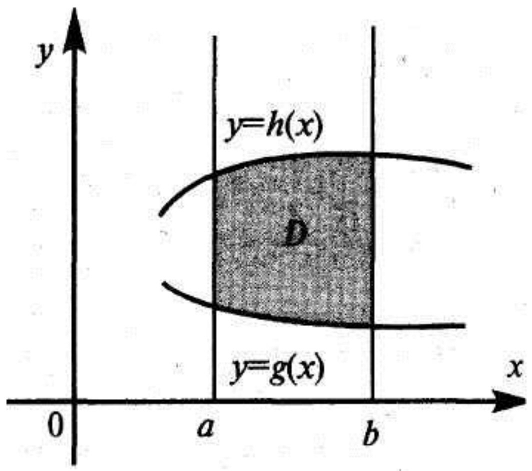


Рис. 7.4

Линии уровня **функции полезности** (они называются *кривыми безразличия*) также позволяют рассматривать вопросы замещения одного товара другим и иллюстрировать решение задачи об оптимальном потреблении (потребительского выбора) (см. рис. 7.5).

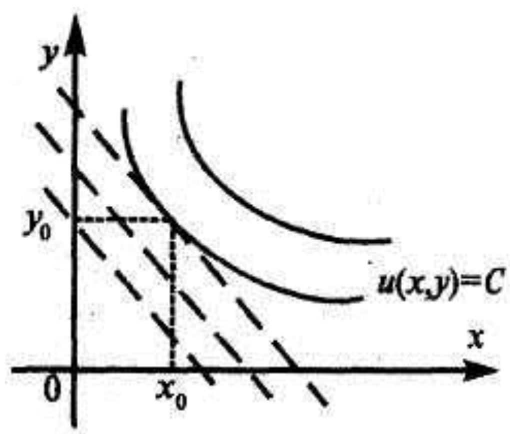


Рис. 7.5

Линия уровня затрат на приобретение товаров x, y изображены на рис. 7.5 пунктиром. Оптимальное потребление обеспечивается значениями (x_0, y_0) — координатами точки касания кривой безразличия и линии уровня затрат. В этой точке заданная полезность достигается наиболее экономичным образом.

Другой пример кривых безразличия возникает в **теории инвестиций.**

Портфель ценных бумаг (под портфелем мы здесь будем понимать совокупность определенных ценных бумаг в определенных количествах) характеризуется двумя основными параметрами — ожидаемой доходностью r и риском σ (точное определение этих величин здесь не может быть приведено, так как оно использует понятия теории вероятностей и математической статистики). Каждому портфелю можно поставить в соответствие точку на координатной плоскости $(\sigma,\ r)$, и тогда множество всех возможных портфелей представляет некоторую область D (рис. 7.6).

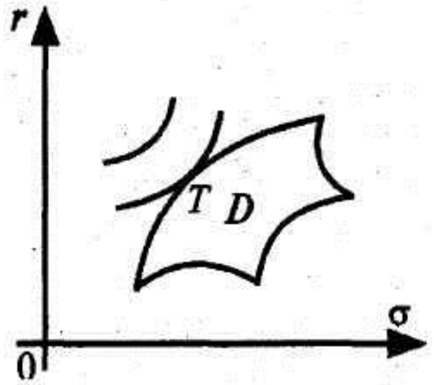


Рис. 7.6

Очевидно, что при равных доходностях инвестор предпочтет портфель с меньшим риском. Таким образом, кривые безразличия — линии уровня функции предпочтения $U = U(\sigma,\ r)$ — выпуклы вниз. Точка T, в которой линия безразличия касается области D соответствует наиболее предпочтительному для данного инвестора портфелю. Соответствующая теория была предложена американским экономистом Харри Марковичем в 1952 г. и с тех пор получила широкое развитие в теории инвестиций.

Понятие частной производной также находит применение в экономической теории. Существует понятие **эластичности функции** одной переменной $E_x(y)$. Аналогично можно ввести понятие *частной эластичности функции* нескольких переменных $z = f(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)$ относительно переменной x_i:

$$E_{x_i}(z) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta_{x_i} z}{z} : \frac{\Delta x_i}{x_i}\right) = \frac{x_i}{z} \cdot z'_{x_i}.$$

Так, например, в производственной функции Кобба—Дугласа $z = b_0 x^{b_1} y^{b_2}$, как нетрудно убедиться, $E_x(z) = b_1$, $E_y(z) = b_2$, т.е. показатели b_1 и b_2 приближенно показывают, на сколько процентов изменится выпуск продукции при изменении только затрат труда x или только объема производственных фондов y на 1%.

Рассмотрим частные производные $u_x^{'}$, $u_y^{'}$ — функции полезности. Они называются *предельными полезностями* и обозначаются Mu_x, Mu_y. Если измерять количество товара в стоимостном выражении, то предельные полезности можно рассматривать как функции спроса на соответствующий товар. Найдем предельные полезности для функции постоянной эластичности

$$u(x,\ y)=\frac{a_1}{1-b_1}x^{1-b_1}+\frac{a_2}{1-b_2}y^{1-b_2}.$$

Имеем $Mu_x = a_1 x^{-b_1}$, $Mu_y = a_2 x^{-b_2}$, т.е. функции спроса с ростом стоимости каждого товара являются убывающими, а параметры b_1 и b_2 представляют частные эластичности спроса на эти товары.

Если рассматривать спрос q как функцию нескольких переменных, например двух — цены товара p и доходов потребителей r, т.е. $q = f(p,\ r)$, то можно говорить о *частных эластичностях спроса от цены* $E_p(q)=\frac{p}{q}q_p^{'}$ и *спроса от доходов* $E_r(q)=\frac{r}{q}q_r^{'}$. Например, можно установить, что $E_r(q) > 0$ для качественных товаров и $E_r(q) < 0$ для низкосортных, так как с ростом доходов спрос на качественные товары увеличивается, а на низкосортные — уменьшается.

Если при исследовании спроса на данный товар рассматривать влияние другого, *альтернативного* товара ценой p_1, т.е. рассматривать спрос как функцию трех переменных $q = f(p,\ p_1,\ r)$, **то можно ввести *перекрестный коэффициент эластичности спроса,*** определяемый по формуле $E_{p_1}(q)=\frac{p_1}{q}q_{p_1}^{'}$ и показывающий приближенно процентное изменение спроса на данный товар при изменении цены альтернативного товара на 1%. Очевидно, что для в з а и м о з а м е н я е м ы х товаров $E_{p_1}(q) > 0$, так как увеличение цены одного товара приводит к увеличению спроса на другой. В то же время для взаимодополняющих товаров $E_{p_1}(q) < 0$, ибо в этом случае рост цены любого товара приводит к снижению спроса.

Рассмотрим еще один коэффициент эластичности, характеризующий производственную функцию нескольких переменных и имеющий важное значение для экономической теории.

Пусть $z = f(x,\ y)$ — производственная функция и $MP(x)= f_x^{'}(x,\ y)$, $MP(y)= f_y^{'}(x,\ y)$ — предельные продукты, соответствующие затратам ресурсов x и y. *Коэффициентом эластичности замещения* называется величина

$$\sigma_{xy}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta\ln\frac{x}{y}}{\Delta\ln\frac{MP(x)}{MP(y)}}=-\frac{d\ln\frac{x}{y}}{d\ln\frac{MP(x)}{MP(y)}}.$$

Так как при малых приращениях аргумента Δt имеет место пибliженное равенство $\Delta\ln t=\frac{\Delta t}{t}$, приращение логарифма переменной величины можно рассматривать как относительное приращение самой величины. Таким образом, *величина, обратная коэффициенту эластичности замещения, показывает приближенно, на сколько процентов изменится отношение предельных продуктов* $MP(x)/MP(y)$ *при изменении отношения затрат ресурсов* (x/y) *на* 1%.

Выше приведена производственная функция с постоянной эластичностью замещения. В общем случае коэффициент эластичности замещения есть функция от двух переменных. Рассмотрим ее выражение в точках изокванты. Так как вдоль изокванты значение функции $z=f(x,\,y)$ постоянно, то полный дифференциал этой функции $dz=f_x^{'}dx+f_y^{'}dy$ вдоль изокванты равен нулю, т. е. $MP(x)d + MP(y)dy = 0$. Отсюда имеем $-\frac{dy}{dx}=\frac{MP(x)}{MP(y)}$, т.е. при сохранении объема выпуска z величина $\left(-\frac{dy}{dx}\right)$, называемая *предельной нормой замещения ресурса x ресурсом y,* равна отношению их предельных продуктов. С учетом последнего равенства можно записать, что $\frac{1}{\sigma_{xy}}=\frac{d\ln\left(-\frac{dy}{dx}\right)}{d\ln\frac{y}{x}}$.

Очевидно, что $\frac{dy}{dx}$ — тангенс угла α наклона касательной к изокванте в точке $M(x,\,y)$, $\frac{y}{x}$ — тангенс угла наклона радиуса-вектора $\overrightarrow{OM}$ точки $M\,(x,\,y)$ (рис. 7.7).

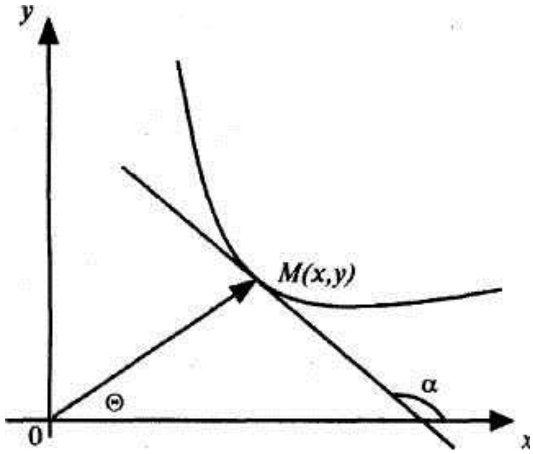


Рис. 7.7

Таким образом, величина $\frac{1}{\sigma_{xy}}$ *характеризует относительное изменение угла наклона касательной к изокванте при изменении угла наклона ее радиуса вектора, т.е. кривизну изокванты.*

Если рассматривать $tg\alpha$ как функцию, то $\frac{1}{\sigma_{xy}}$ есть коэффициент эластичности в обычном смысле.

Понятие **выпуклости функции** также играет существенную роль в понимании важнейших экономических законов. Многомерные аналоги примеров позволяют математически сформулировать законы убывающей доходности и убывающей предельной полезности.

Список литературы

1. Бараненков Г.С., Демидович Б.П. и др. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов /Под ред. Б.П. Демидовича. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1966.
2. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1969.
3. Дюбюк П.Е., Кручкович Г.И. и др. Сборник задач по курсу высшей математики. М.: Высшая школа, 1965.
4. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу. М.: Высшая школа, 1966.
5. Лунгу К.Н., Письменный Д.Т. и др. Сборник задач по высшей математике. Ч. 1, 2. М.: Айрис-пресс, 2003. - 576 с.: ил.
6. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1961.
7. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. 1 часть. – 2-е изд., испр. – М.: Айрис-пресс, 2002. – 288 с.: ил.
8. Фильчаков П.Ф. Справочник по высшей математике. Киев: Наукова думка, 1972.
9. Шнейдер В.Е., Слуцкий А.И., Шумов А.С. Краткий курс высшей математики. Ч. 1,2. - М.: Высшая школа, 1978. - 712 с.

Кулешова Ирина Ивановна

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
Часть I

Методическое пособие для студентов заочной формы обучения
направления «Экономика»

Редактор Е.Ф. Изотова

Подписано к печати 16.06.14. Формат 60х84/16.

Усл. печ. л. 6,06. Тираж 75 экз. Зак.141268. Рег. № 121.

Отпечатано в РИО Рубцовского индустриального института

658207, Рубцовск, ул. Тракторная, 2/6.